

Fichas de
Dibujo Técnico
SERIE 2.ª
N.os 51 AL 100
TOMAS ALVAREZ PERALTO
Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL
y OFICINA TÉCNICA de E. T. P. I.



Depósito Legal: SE - 186 - 1966

Imprenta Alvarez
González Cuadrado, 24
Sevilla

2.ª SERIE

PRÓLOGO

De acuerdo con las directrices que nos hemos marcado al concebir esta obra, detalladas en el prólogo de la primera serie, publicamos hoy como continuación de ésta, otras cincuenta fichas de Dibujo técnico que componen la segunda serie.

En ella van incluídos problemas geométricos que pueden considerarse como complementos de los de la serie anterior; problemas sobre circunferencias condicionadas; estudio de las curvas geométricas en general y en particular de las curvas cónicas y de rodadura, de tanta aplicación en la técnica.

Las propiedades de las curvas cónicas las hemos deducido del estudio de la sección de una superficie cónica de revolución por un plano, enfocadas desde un punto de vista general a fin de aplicarlas posteriormente a cada caso particular. Esto permite, a nuestro juicio, una más profunda asimilación, ya que al prescindir de particularidades que fácilmente se olvidan, se fijan intensamente las ideas generales que sirven de base tanto para el trazado de las curvas como el de sus tangentes. En todo momento nos hemos esforzado por hacer destacar en cada caso particular las analogías existentes con los casos generales.

Igual criterio hemos seguido en el estudio de las curvas cíclicas, imprescindibles en el trazado de engranajes. Los trazados particulares de cada una de ellas, son consecuencia de las propiedades generales de las curvas de rodadura que previamente hemos estudiado, y que permiten deducir y recordar con facilidad detalles fáciles de olvidar. Es ejemplo significativo el del trazado por un punto de la curva, de la tangente a una curva cíclica cualquiera, tanto normal como alargada o acortada; basta con haber aprendido bien que *siempre* «la tangente en un punto cualquiera de una curva cíclica es perpendicular a la recta que une dicho punto con el centro instantáneo de rotación».

También incluímos en esta segunda serie algunas fichas de normalización de perfiles laminados, como introducción al estudio de dibujos de estructuras metálicas; normas de disposición de vistas y cortes, así como otras de iniciación al estudio de lugares geométricos de frecuente aplicación en el dibujo técnico.

Creemos que con las cien fichas publicadas en las series 1.ª y 2.ª, existe base suficiente para poder desarrollar con eficacia un curso de Dibujo técnico en su fase de iniciación, tanto en su aspecto geométrico como en el de introducción al estudio de la Normalización.

En líneas generales estimamos puede establecerse un programa racional, ordenando por materias las cien fichas publicadas (número índice de la división decimal, en la parte superior derecha de la ficha), con las variantes y complementos adecuados que el profesor estime oportuno introducir, ya que es probable que al tratar de adaptar este trabajo a su programa de curso, resulten incompletas o excesivas algunas de las materias tratadas.

Esperamos del profesorado en general, y de los alumnos en particular, una benévola acogida de esta obra y de antemano les expresamos por esto nuestro agradecimiento. Ello nos servirá de estímulo para la prosecución de la labor emprendida.

Sevilla - Enero - 1966

El Autor

ÍNDICE DE MATERIAS de las 50 Fichas editadas en la segunda serie.

C. D.		Ficha
P. G. 2002	PUNTO Y RECTA.—Posiciones relativas de punto y recta. Pendiente de una recta con respecto a otra................	53
P. G. 2110 Hoja 2	PROBLEMAS.—Construir un ángulo dada su amplitud en grados..........	60
P. G. 2110 Hoja 3	TABLA DE PENDIENTES de una recta con respecto a otra, para la construcción de un ángulo dada su amplitud en grados.	61
P. G. 2115	PROBLEMAS.—Trazar la bisectriz de un ángulo de vértice no accesible..	52
P. G. 2440	LÍNEAS CURVAS.—Definición y clasificación. Tangente y normal	70
P. G. 2440 Hoja 2	LÍNEAS CURVAS (continuación).—Elementos; tangente. Cuerda; secante...	71
P. G. 2440 Hoja 3	LÍNEAS CURVAS (continuación). — Ángulo interior. Ángulo de contingencia. Plano osculador. Circunferencia osculatriz. Centro de curvatura. Curvatura. Angulo de torsión. Triedro fundamental. Puntos singulares. Puntos de inflexión.........	72
P. G. 2440 Hoja 4	LÍNEAS CURVAS (continuación).-Punto de retroceso. Punto múltiple. Evoluta. Evolvente. Envolvente. Involuta	73
P. G. 2450	CURVAS CÓNICAS.—Superficie cónica de revolución. Secciones cónicas...	74
P. G. 2450 Hoja 2	CURVAS CÓNICAS (continuación).—Foco. Eje focal. Vértice. Directriz. Radio vector............................	75
P. G. 2450 Hoja 3	CURVAS CÓNICAS (continuación).—Propiedades comunes. Excentricidad. Definición general de una curva cónica......	76

C. D.		Ficha
P. G. 2451	PROBLEMAS.—Construir una curva cónica conocido uno de sus focos, la directriz y la excentricidad	78
P. G. 2460	ELIPSE.—Teorema de Dandelin. Ejes; relaciones métricas	77
P. G. 2460 Hoja 2	ELIPSE.—Circunferencia focal. Tangente y normal. Propiedades	80
P. G. 2461	PROBLEMAS.—Construir una elipse dada la longitud de sus ejes	79
P. G. 2462	PROBLEMAS.—Por un punto dado trazar una recta tangente a una elipse	81
P. G. 2480	PARÁBOLA.—Directriz. Eje. Relaciones métricas fundamentales	82
P. G. 2480 Hoja 2	PARÁBOLA.—Tangente y normal; propiedades. Subtangente y subnormal; propiedades	83
P. G. 2481	PROBLEMAS.—Construir una parábola dada su directriz y su foco	84
P. G. 2482	PROBLEMAS.—Por un punto dado trazar una recta tangente a una parábola	85
P. G. 2500	HIPÉRBOLA.—Teorema de Dandelin. Ejes; relaciones métricas	86
P. G. 2500 Hoja 2	HIPÉRBOLA.—Circunferencia focal. Tangente y normal. Propiedades.	87
P. G. 2501	PROBLEMAS.—Construir una hipérbola dado su eje principal y su distancia focal	88
P. G. 2502	PROBLEMAS.—Por un punto dado trazar una recta tangente a una hipérbola	89
P. G. 2520	CURVAS DE RODADURA.—Definición. Propiedades generales. Tangente y normal	90
P. G. 2520 Hoja 2	CURVAS DE RODADURA (continuación).—Clasificación	91
P. G. 2530	PROBLEMAS.—Construir una cicloide normal dado el radio de la ruleta	92
P. G. 2540	PROBLEMAS.—Construir una epicicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz	93
P. G. 2550	PROBLEMAS.—Construir una hipocicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz	94
P. G. 2560	PROBLEMAS.—Construir una evolvente de círculo dado el radio de la directriz	99
P. G. 2802	PROBLEMAS.—Lugares geométricos. Ejemplos 1 al 4	51
P. G. 2803	PROBLEMAS.—Lugares geométricos. Ejemplos 5 al 8	56

C. D.		Ficha
P. G. 2804	PROBLEMAS.—Lugares geométricos. Ejemplos 9 al 12	58
P. G. 2805	PROBLEMAS.—Lugares geométricos. Ejemplos 13 al 17	100
P. G. 2851	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por dos puntos dados (r, P, P)	54
P. G. 2852	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una recta dada (r, P, R)	55
P. G. 2853	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una circunferencia dada (r, P, C)	62
P. G. 2854	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a dos rectas dadas (r, R, R)	63
P. G. 2855	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a una recta y circunferencia dadas (r, R, C)	65
P. G. 2856	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C)	67
P. G. 2856 Hoja 2	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C) (continuación)	68
P. G. 2856 Hoja 3	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C) (continuación)	69
P. G. 2861	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados (P, P, P)	64
P. G. 2867	PROBLEMAS.—Trazar una circunferencia que sea tangente a tres rectas dadas (R, R, R)	66
N. 4005	NORMALIZACIÓN de dibujos.—Disposición de vistas y cortes	57
N. 4005 Hoja 2	NORMALIZACIÓN de dibujos.—Disposición de vistas y cortes (continuación)	59
N. 4220	NORMALIZACIÓN de perfiles laminados de acero.—Vigas de perfil normal (PN)	95
N. 4221	NORMALIZACIÓN de perfiles laminados de acero.—Perfil en U normal (PN)	96
N. 4222	NORMALIZACIÓN de perfiles laminados de acero.—Angular de lados iguales de perfil normal (PN)	97
N. 4223	NORMALIZACIÓN de perfiles laminados de acero.—Perfil en T normal (PN)	98

Enero, 1966.

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Lugares geométricos

Ejemplos 1 al 4

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla.
Enero 1966

LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Generalidades.

En la ficha P. G. 2801 hemos definido el concepto de *lugar geométrico* como «una serie infinita de puntos que tienen todos la misma propiedad». También hemos hecho resaltar la importancia que tiene el conocimiento del mayor número posible de ellos, a fin de poder utilizarlos en el llamado «método de intersección de lugares geométricos» de tantísima aplicación en la resolución de numerosos problemas del dibujo técnico.

Entre los numerosos l. g. que pueden establecerse entre entes geométricos, vamos a considerar previamente dos grupos fundamentales de gran aplicación al dibujo técnico: En el primer grupo incluiremos los referentes a conceptos de *equidistancias*, y en el segundo los de obtención de centros de circunferencias que hayan de cumplir las condiciones de pasar por un punto dado, ser tangente a una recta o ser tangente a una circunferencia dada. Ambos grupos están íntimamente relacionados y son equivalentes entre sí, como veremos a continuación, aún cuando sus enunciados sean aparentemente diferentes.

Los conceptos de distancia de un punto a otro punto, recta o circunferencia coplanarios, relacionados con los l. g. del primer grupo, se definen de la siguiente manera:

1.° Se llama *distancia* de un punto a otro, a la longitud del segmento que los une.

2.° Se llama *distancia* de un punto a una recta, a la longitud del segmento comprendido entre dicho punto y el pié de la perpendicular trazada por él a la recta.

3.° Se llama *distancia* de un punto a una circunferencia coplanarios, a la longitud del segmento comprendido entre dicho punto y el extremo del radio que pasa por él.

Las propiedades de trazado de circunferencias condicionadas a pasar por un punto, ser tangentes a una recta o ser tangentes a una circunferencia, relacionadas con los l. g. del segundo grupo, se expresan a continuación:

1.ª Dados dos puntos cualesquiera, si hacemos centro en uno de ellos y trazamos una circunferencia de radio igual a la *distancia* entre ambos, dicha circunferencia pasará por el otro.

2.ª Dados un punto y una recta que no lo contiene, si hacemos centro en dicho punto y trazamos una circunferencia de radio igual a la *distancia* entre ambos, dicha circunferencia será *tangente* a la recta.

3.ª Dados un punto y una circunferencia coplanaria que no lo contiene, si hacemos centro en dicho punto y trazamos una circunferencia de radio igual a la *distancia* entre ambos, dicha circunferencia será *tangente* a la dada.

En virtud de las definiciones y propiedades anteriores, enunciar un lugar geométrico que indique p. e. «encontrar los puntos del plano que

equidisten de una recta dada una magnitud determinada» es equivalente al enunciado de otro que diga «encontrar los puntos del plano que sean centros de circunferencias tangentes a una recta dada de radio prefijado». Demostrada la existencia del primer lugar queda demostrada la del segundo, equivalente a aquél.

2. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 1 (P).

El l. g. de los puntos del plano que equidistan una magnitud dada r de un punto O de dicho plano, es la circunferencia de radio r y centro O.

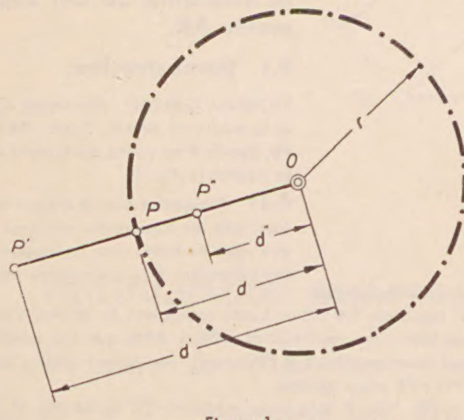


Figura 1

2. 1 Demostración.

TEOREMA DIRECTO=. *Hipótesis:* O es el centro de la circunferencia l. g. de radio r. *Tesis:* Cualquier punto P de ella, equidista de O la magnitud r (figura 1).

DEMOSTRACIÓN: La circunferencia se define precisamente por esta propiedad (ver ficha P. G. 2401) (d=r).

TEOREMA CONTRARIO =. *Hipótesis:* O es el centro de la circunferencia l. g. de radio r. *Tesis:* Cualquier punto P no perteneciente a ella, no equidista de O la magnitud r (fig. 1).

DEMOSTRACIÓN: Si el punto P no pertenece a la circunferencia, será o bien exterior a ella (posición P') o bien interior (posición P''); en el primer caso la distancia d' de P' a O será mayor que r (d' > r) y en el segundo, la distancia d'' de P'' a O será menor que r (d'' < r) (ver ficha P. G. 2401).

3. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 2 (P).

El l. g. de los centros de circunferencias de radio dado r que pasan por un punto O de dicho plano, es la circunferencia de centro O y radio r.

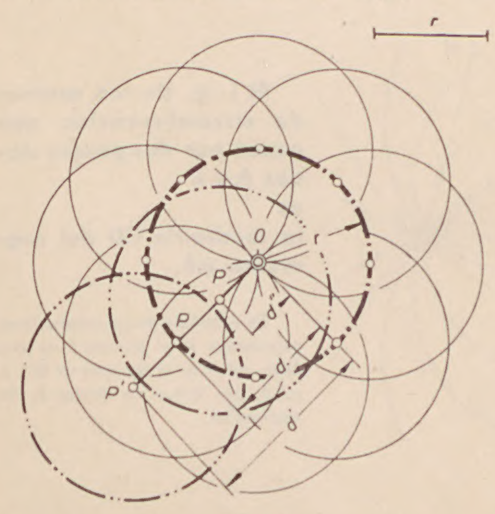


Figura 2

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1 de esta ficha, este l. g. es equivalente al l. g. n.º 1, por lo que no damos su demostración.

4. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 3 (PP).

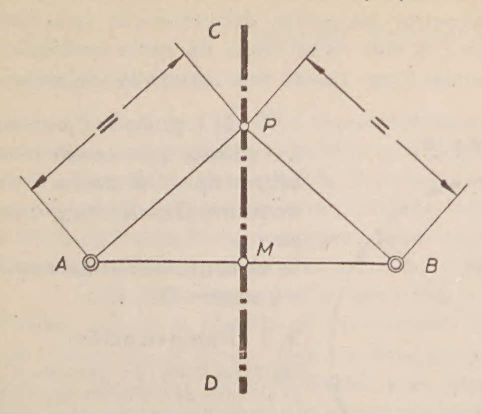


Figura 3

El l. g. de los puntos del plano equidistantes de dos puntos dados A y B, es la mediatriz CD del segmento AB.

4.1 Demostración.

TEOREMA DIRECTO. *Hipótesis*: CD es la mediatriz de AB. *Tesis:* PA = PB, siendo P un punto cualquiera de la mediatriz (fig. 3).

4.11 Propiedad que se supone demostrada en Geometría racional y que sirve de base para la siguiente demostración: *Dos triángulos rectángulos son iguales, si tienen iguales sus dos catetos.*

DEMOSTRACIÓN: Siendo M el centro del segmento AB y P un punto cualquiera de la mediatriz, unamos P con A y B y se nos formarán los triángulos rectángulos APM y BPM, que son iguales por tener los catetos AM y BM iguales (por construcción) y el PM común, por lo que (según propiedad 4.11) las respectivas hipotenusas PA y PB serán iguales.

TEOREMA RECÍPROCO=. *Hipótesis:* PA = PB. *Tesis:* P está en la mediatriz CD de AB (fig. 3).

4.12 Propiedad que se supone demostrada en Geometría racional y que sirve de base para la siguiente demostración: *La perpendicular en el punto medio de un segmento pasa por puntos equidistantes de sus extremos.*

DEMOSTRACIÓN: Trazando por el punto medio M de AB una perpendicular a ella (su mediatriz), pasará por puntos equidistantes de A y B (propiedad anterior) y por consiguiente por P

5. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 4 (PP).

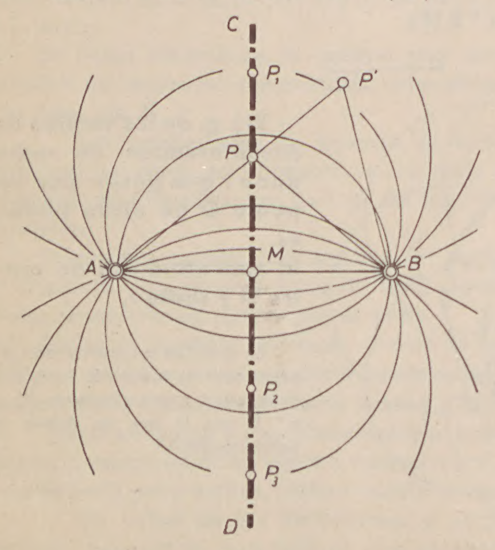


Figura 4

El l. g. de los centros de circunferencias que pasen por dos puntos dados A y B es la mediatriz CD del segmento AB.

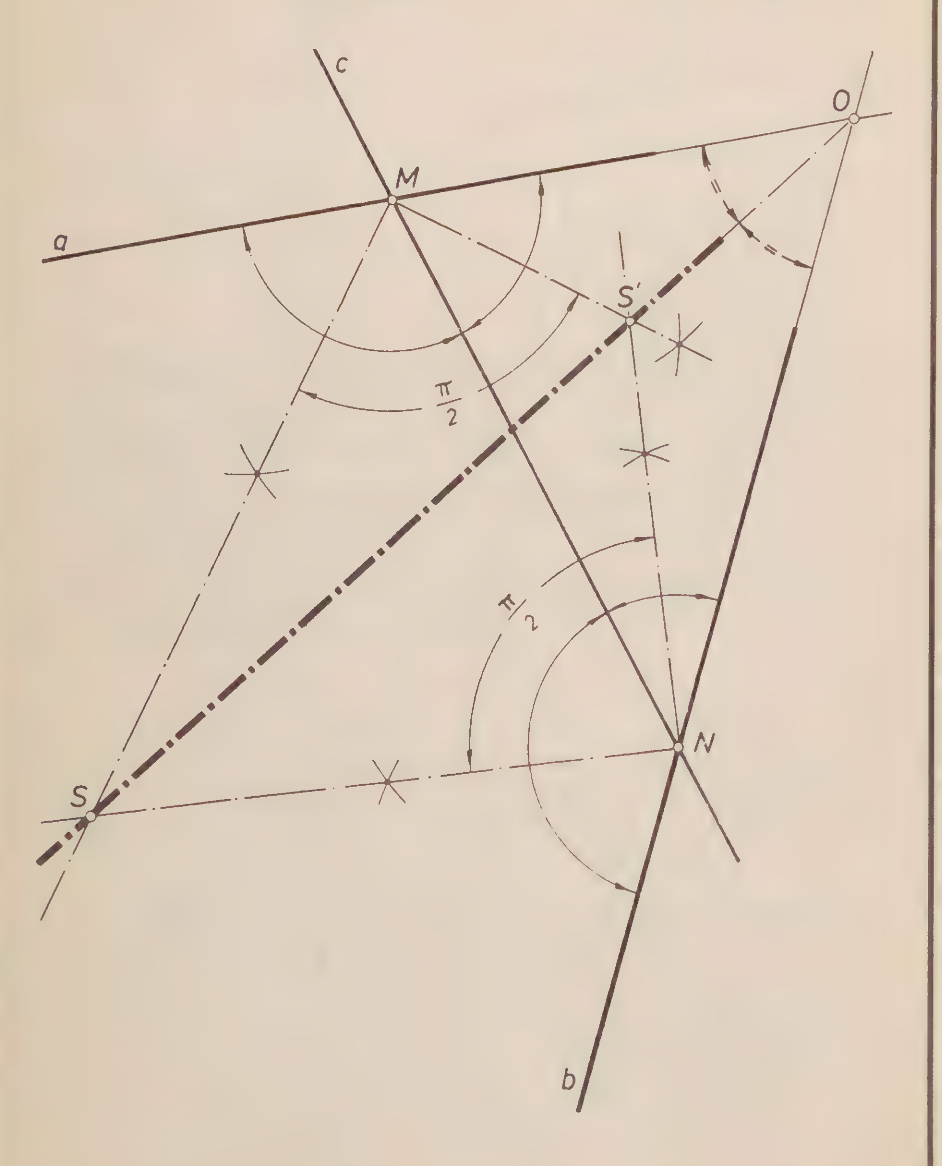
En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1 de esta ficha, este l. g. es equivalente al l. g. n.° 3, por lo que no damos su demostración.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar la bisectriz de un ángulo de vértice no accesible.

ENUNCIADO: *Trazar la bisectriz de un ángulo de vértice no accesible.*



1. Definiciones.

Este problema ha sido ya tratado en la ficha P. G. 2114 bajo el supuesto de ser conocida la posición del vértice del ángulo. En ella definimos la *bisectriz* de un ángulo como a la semirrecta que pasando por su vértice lo divide en dos partes iguales. Su propiedad fundamental es la de ser el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de los lados de dicho ángulo.

En esta ficha vamos a resolver el mismo problema, suponiendo que el vértice **O** del ángulo no es accesible (cae fuera de los bordes del tablero), cosa que ocurre con frecuencia en dibujos en perspectiva cónica.

2. Resolución.

Sea **ab** el ángulo dado de lados **a** y **b.**

2.1 Trácese una recta cualquiera **c** que corte a los lados **a** y **b** en los puntos **M** y **N** respectivamente. La transversal **c** forma con el lado **a** ángulos suplementarios, e igualmente lo son los que forman la **c** con el lado **b** (ver ficha P. G. 2110).

2.2 Trácense las bisectrices de cada uno de estos dos ángulos suplementarios que serán perpendiculares entre sí (ver ficha P. G. 2114).

2.3 Las bisectrices anteriores se cortarán en dos puntos **S** y **S'** *interiores* del ángulo, que al unirlos entre sí nos dará la bisectriz **SS'** pedida.

3. Propiedades que se suponen demostradas en la Geometría racional y que sirven de base para la resolución de este problema.

3.1 Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del mismo.

3.2 Cualquier punto de un plano equidistante de los lados de un ángulo dado, está en la bisectriz de dicho ángulo.

4. Demostración.

4.1 El punto **S,** por estar situado en la bisectriz del ángulo **ac,** equidista de **a** y **c** (según 3.1).

4.2 El punto **S,** por estar a su vez situado en la bisectriz del ángulo **cb,** equidista también de **c** y **b** (según 3.1).

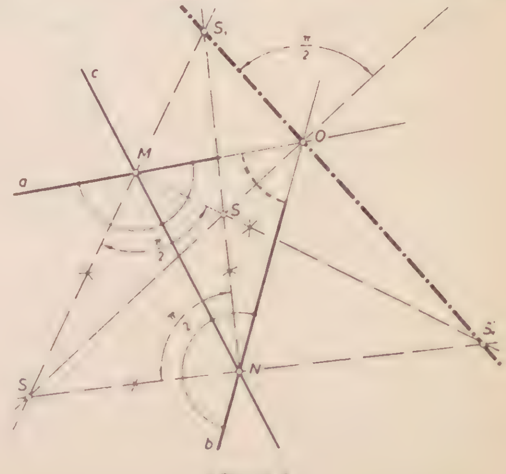


Figura 1

4.3 Por consiguiente, dicho punto **S** equidistará de **a** y **b**, perteneciendo pues a la bisectriz del ángulo **ab** (según 3.2).

4.4 Igualmente se demuestra que el punto **S'** está en la bisectriz de **ab**, concluyéndose que la recta **SS'** es la bisectriz pedida.

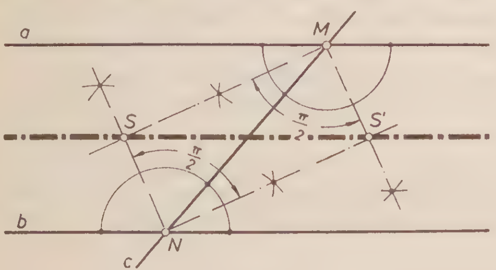


Figura 2

5. Discusión.

En el párrafo 2.3 hemos dicho que los puntos **S** y **S'** de intersección de las bisectrices de los ángulos formados por la intersección de la transversal **c** con los lados **a** y **b**, son *interiores* al ángulo **ab**. Esto es cierto si se consideran las intersecciones de las bisectrices que están en un mismo semiplano de **c**; pero si consideramos las que están en distinto semiplano, dichas bisectrices se cortarán también, pero en puntos *exteriores* al ángulo dado, siendo la recta que los une (fig. 1) bisectriz del ángulo *suplementario* al dado, y por consiguiente *perpendicular* a la anterior (ver ficha P. G. 2114).

Si el ángulo **ab** fuese nulo, las rectas **a** y **b** serían paralelas y la construcción dada en esta ficha sigue siendo válida para este caso particular, obteniéndose como bisectriz la *paralela media*. El enunciado del mismo sería: **Trazar la paralela media de dos rectas dadas** (fig. 2).

Estas soluciones son válidas también para el caso ya estudiado en la ficha P. G. 2114 en que el vértice **O** del ángulo es accesible o conocido, siendo suficiente para determinar la bisectriz, obtener tan sólo uno de los puntos **S** o **S'**, que al unirlo con **O** nos da la bisectriz pedida. No damos la construcción gráfica de este caso que dejamos al estudio del lector.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PUNTO Y RECTA.-Posiciones relativas de punto y recta. Pendiente de una recta con respecto a otra.

PUNTO Y RECTA

1. Definiciones.

No es posible definir el punto y la recta mediante otros conceptos más sencillos; son conceptos intuitivos. Tenemos la idea del punto mediante imágenes de la vida real, como p. e. la huella que deja sobre el papel la punta de un lápiz bien afilado; esta huella no tiene extensión aparentemente, aun cuando es bastante apreciable si la vemos agrandada con una lupa o un microscopio. Prescindiendo de esta extensión nace en nuestra mente el concepto de *punto geométrico*, que idealmente se supone sin dimensión. Igualmente tenemos la idea de una recta, comparándola a un rayo luminoso, una visual dirigida entre dos puntos o la huella que deja el lápiz sobre el papel, cuando aquél se apoya sobre una regla; esta huella tampoco tiene espesor aparentemente. Prescindiendo de dicho espesor nace igualmente en nuestra mente el concepto de *recta geométrica*, que idealmente no tiene espesor aunque sí dimensión longitudinal; la recta geométrica se considera indefinida.

2. Notación.

El punto geométrico se representa gráficamente por un pequeño círculo (de 1 a 1,5 mm. de diámetro), o también por una cruz o aspa de línea fina y lados perpendiculares (ver ficha P. G. 2001). Un punto se designa con una letra *mayúscula* colocada junto a su representación gráfica y cerca de ella.

La recta geométrica se representa gráficamente por un trazo a lápiz o tinta guiado con la regla o cartabón (ver fichas G. F. 1017 y G. F. 1018). Se la designa por una letra *minúscula* colocada junto a ella de forma que no se confunda con otra cercana.

3. Posiciones relativas de un punto con respecto a una recta, y de una recta con respecto a otra.

3.1 Las posiciones relativas de un punto con respecto a una recta sólo son dos. O el punto *pertenece* a la recta, o es *exterior* a ella.

3.2 Las posiciones relativas de una recta con respecto a otra, son las siguientes: Si ambas tienen un punto común, se dice que son *secantes*, y si no tienen ningún punto común se las llaman *paralelas* (ver ficha P. G. 2121). Dos rectas secantes pueden cortarse formando ángulos desiguales, en cuyo caso se dice que son *oblicuas* entre sí, o bien cortarse formando ángulos iguales, en cuyo caso se las denomina *perpendiculares* (ver ficha P. G. 2130).

4. Pendiente de una recta con respecto a otra.

En la ficha P. G. 2110 damos con toda generalidad el concepto de ángulo, su definición, clasificación y medición. La magnitud de un ángulo depende exclusivamente de la posición de una recta con respecto a otra, pudiendo ser como acabamos de ver, paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Para expresar la inclinación de una recta con respecto a la otra, vamos a dar el concepto de *pendiente* que simplifica grandemente la construcción gráfica de un ángulo cualquiera, cuando se conoce su amplitud en grados sexagesimales o centesimales (ver ficha P. G. 2110 hoja 2).

Sean **a** y **b** dos rectas cualesquiera, que para mayor generalidad suponemos se cortan oblicuamente en el punto **O** (fig. 1).

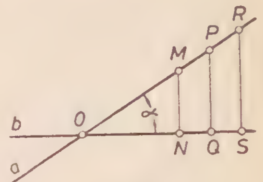


Figura 1

Tomemos un punto cualquiera **M** sobre una de las rectas (la **a** p. e.) y tracemos por él una perpendicular a la otra (ver ficha P. G. 2133), siendo **N** el pie de dicha perpendicular. Midamos ahora lo más exactamente posible, los segmentos **MN** y **ON**; efectúese el cociente **MN : ON** de ambas lecturas. Si repetimos estas operaciones con otros puntos distintos **P, R...** de **a**, y calculamos los cocientes **PQ : OQ, RS : OS,...** obtendremos cifras que son sensiblemente iguales, lo que nos induce a pensar que cuantas veces repitamos dicha operación con nuevos puntos de **a** obtendremos el mismo resultado, cosa fácil de comprobar.

Los resultados obtenidos variarán probablemente en su última cifra; estas diferencias son debidas tan sólo a los inevitables errores de medida, y no existen teóricamente. En Geometría racional se demuestra que la relación (cociente) entre los segmentos **MN** y **ON** para cualquier punto **M** de la recta **a**, es constante. Esta relación, por ser cociente de dos magnitudes lineales (homogéneas), es siempre un *número abstracto.*

Repitiendo estas operaciones con otro ángulo distinto del anterior, obtendremos otra constante diferente en su valor numérico. Así pues, a todo ángulo dado corresponde un número, y sólo uno, obtenido de la forma indicada anteriormente, que puede servirnos en cierto modo para caracterizar dicho ángulo. Los segmentos **MN, PQ, RS...** perpendiculares a **b** y trazados por puntos cualesquiera de **a**, se llaman *ordenadas* de dichos puntos con respecto a la recta **b**; los segmentos **ON, OQ, OS...** desde el vértice **O** a los pies de las perpendiculares anteriores se llaman *abcisas* de dichos puntos con respecto a la recta **b**. El cociente de cada ordenada por su abcisa correspondiente se llama *pendiente* de **a** con respecto a **b**.*

El valor de la pendiente de una recta con respecto a otra suele expresarse en tantos por ciento; si p. e. su valor numérico es de 0,6258 suele decirse también que la pendiente de ellas es de 62,58 % equivalente a

$$0{,}6258 = \frac{62{,}58}{100} = 62{,}58\ \%$$

La pendiente del ángulo formado por dos rectas paralelas (ángulo nulo) es *cero*, ya que al desplazarse el punto **O** al infinito, el cociente **MN : ON**

* En Trigonometría, a este cociente se le denomina *tangente* del ángulo **ab** y se expresa abreviadamente por tg ab = α, siendo α el valor numérico de la *tangente trigonométrica del ángulo* formado por las rectas **a** y **b**, o también, como acabamos de ver, su *pendiente.*

se anula por ser infinito el denominador (ver ficha P. G. 2121) (fig. 2).

El valor de la pendiente de un ángulo que varíe de 0° a 45°, varía de *cero* a la *unidad*, por ser siempre el cociente **MN : ON** menor que uno (el numerador es menor que el denominador) (figura 3).

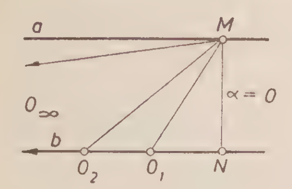


Figura 2

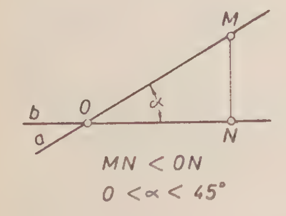


Figura 3

El valor de la pendiente de un ángulo de 45° es la *unidad*, por tener este valor el cociente **MN : ON** (el numerador es igual al denominador) (figura 4).

El valor de la pendiente para un ángulo que varía de 45° a 90°, varía desde *uno* a *infinito*, por ser siempre el cociente **MN : ON** creciente y mayor que uno (el numerador es mayor que el denominador) (figura 5).

El valor de la pendiente de un ángulo de 90° (rectas perpendiculares) es *infinito*, por tener este valor el cociente **MN : ON** (denominador cero) (figura 6).

Como resumen de lo expuesto vemos que a cualquier ángulo comprendido

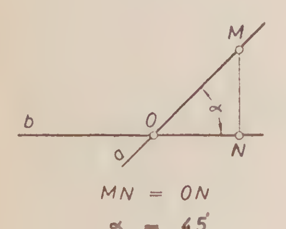
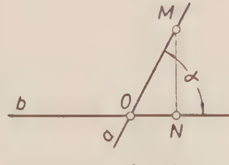


Figura 4



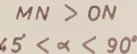


Figura 5

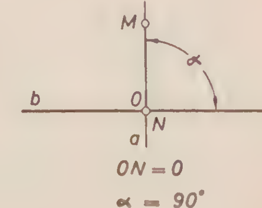


Figura 6

entre 0° y 90° le corresponde una pendiente positiva (ver orientación del ángulo en ficha P. G. 2110) comprendida entre *cero* e *infinito*. Recíprocamente, a todo valor numérico positivo, comprendido entre *cero* e *infinito* le corresponde un ángulo comprendido entre 0° y 90°.* Por consiguiente es siempre posible construir gráficamente un ángulo cualquiera, siempre que se conozca su pendiente, o mediante una tabla adecuada, obtenerla cuando sea dada la magnitud del mismo en unidades sexagesimales o centesimales. Esta construcción sumamente práctica y exacta está dada en la ficha P. G. 2110, hoja 2.

* Esto no es rigurosamente cierto. En Trigonometría se estudia, bajo un concepto más general de ángulo, que a un valor determinado de la tangente, le corresponden infinitos valores de ángulos que difieren en $2\,k\,\pi$, siendo k un entero cualquiera.

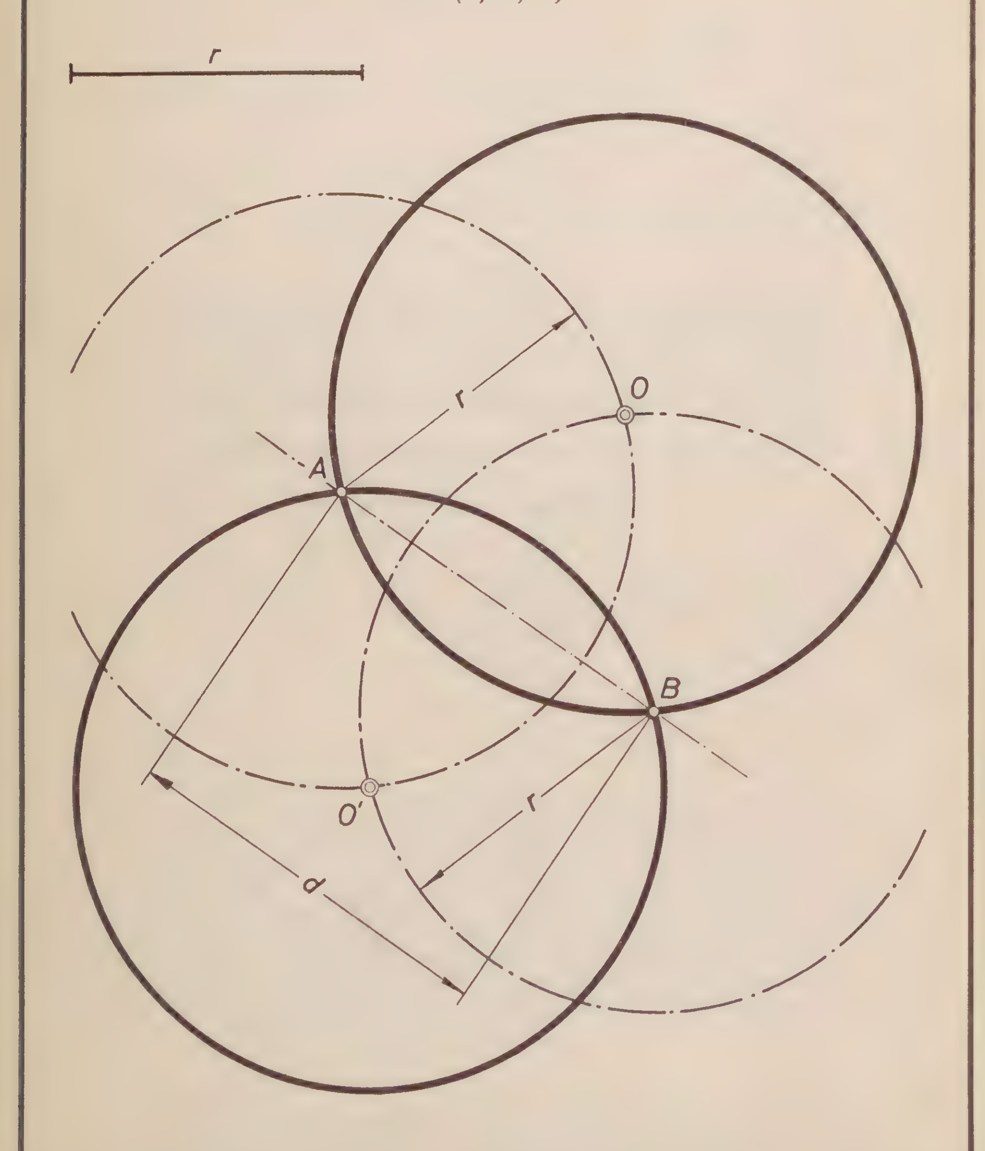
Imp. Alvarez-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por dos puntos dados (r, P. P).

Enero 1966

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por dos puntos dados (r, P, P).*



1. Generalidades.

En la ficha P. G. 2431 hemos estudiado el planteamiento de una serie de problemas de tangencias, que han sido agrupados bajo el concepto general de «problemas sobre circunferencias condicionadas», y hemos establecido dos grupos **A** y **B**, según que sea conocido o no el radio de la circunferencia pedida.

Comenzamos el estudio de los planteados, con el del problema 1.º del Grupo **A (r, P, P)**, cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **A** y **B** los puntos dados y **r** la magnitud del radio.

2.1. Con centro en **A** y radio **r** trácese una circunferencia.

2.2. Con centro en **B** y radio **r** trácese otra, análoga a la anterior.

2.3. Estas dos circunferencias podrán tener al menos un punto común **O** que será el centro de la circunferencia buscada.

3. Demostración.

3.1. Prescindiendo del punto **B**, para que la circunferencia pedida pase por el punto **A**, su centro deberá hallarse en la circunferencia trazada según 2.1, ya que esta circunferencia tiene la propiedad enunciada en el l. g. n.º 2 de la ficha P. G. 2802.

3.2. Igualmente, y prescindiendo del punto **A**, el centro de la circunferencia buscada deberá hallarse sobre la circunferencia trazada según 2.2.

3.3. Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambas, dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

La solución de este problema depende fundamentalmente de las magnitudes relativas entre la distancia **d** de los dos puntos **A** y **B** dados y la del radio **r** conocido.

El problema planteado tendrá solución si existen puntos comunes entre las circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2, lo cual ocurrirá cuando sean tangentes (un punto común) o secantes (dos puntos comunes). Por consiguiente podrá haber dos soluciones distintas como máximo, que son las que existen en el ejemplo propuesto en esta ficha.

4.1. Para que las dos circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2 se corten, es preciso se cumpla la relación $\mathbf{r + r' > d > r - r'}$ (ver ficha P. G. 2401). Esta relación para el caso presente en que $\mathbf{r = r'}$ se transforma en $\mathbf{2r > d > 0}$. Si esto se verifica, a más del punto **O** obtendremos otro **O'** que también cumple las condiciones del enunciado de este problema, que en este caso tendrá **2 soluciones** (fig. 1).

4.2. Si las circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2 son tangentes exteriormente, sólo tendrán un punto común.

Para que ello suceda es preciso que se cumpla la condición $\mathbf{d = r + r'}$ (ver ficha P. G. 2401), que para el caso considerado en que $\mathbf{r = r'}$ se transforma en $\mathbf{d = 2r}$. En este caso, el problema sólo tendrá **una solución** (fig. 2).

4.3. Si las circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2 son exteriores, no tienen ningún punto común. Para que ello suceda es preciso que se cumpla la condición $\mathbf{d > r + r'}$ (ver ficha P. G. 2401), que para el caso considerado en que $\mathbf{r = r'}$ se transforma en $\mathbf{d > 2r}$. En este caso el problema **no tiene solución** (fig. 3).

4.4. En el caso muy particular de que $\mathbf{d = 0}$, los dos puntos dados coinciden, y el problema presenta **infinitas soluciones.** Su enunciado se transformaría en el de «trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto dado» (véase l. g. número 2 en la ficha P. G. 2802).

4.5. Como resumen de lo expuesto, estableceremos las siguientes relaciones posibles:

$0 < d < 2r$	2 soluciones	(fig. 1).
$d = 2r$	1 solución	(fig. 2).
$d > 2r$	Sin solución	(fig. 3).

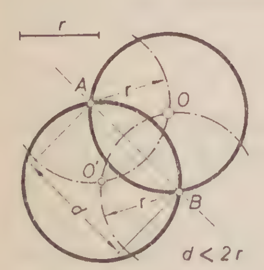


Figura 1

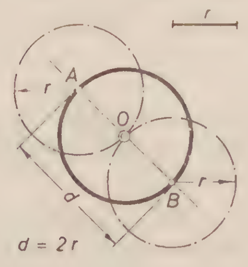


Figura 2

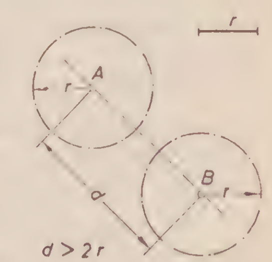


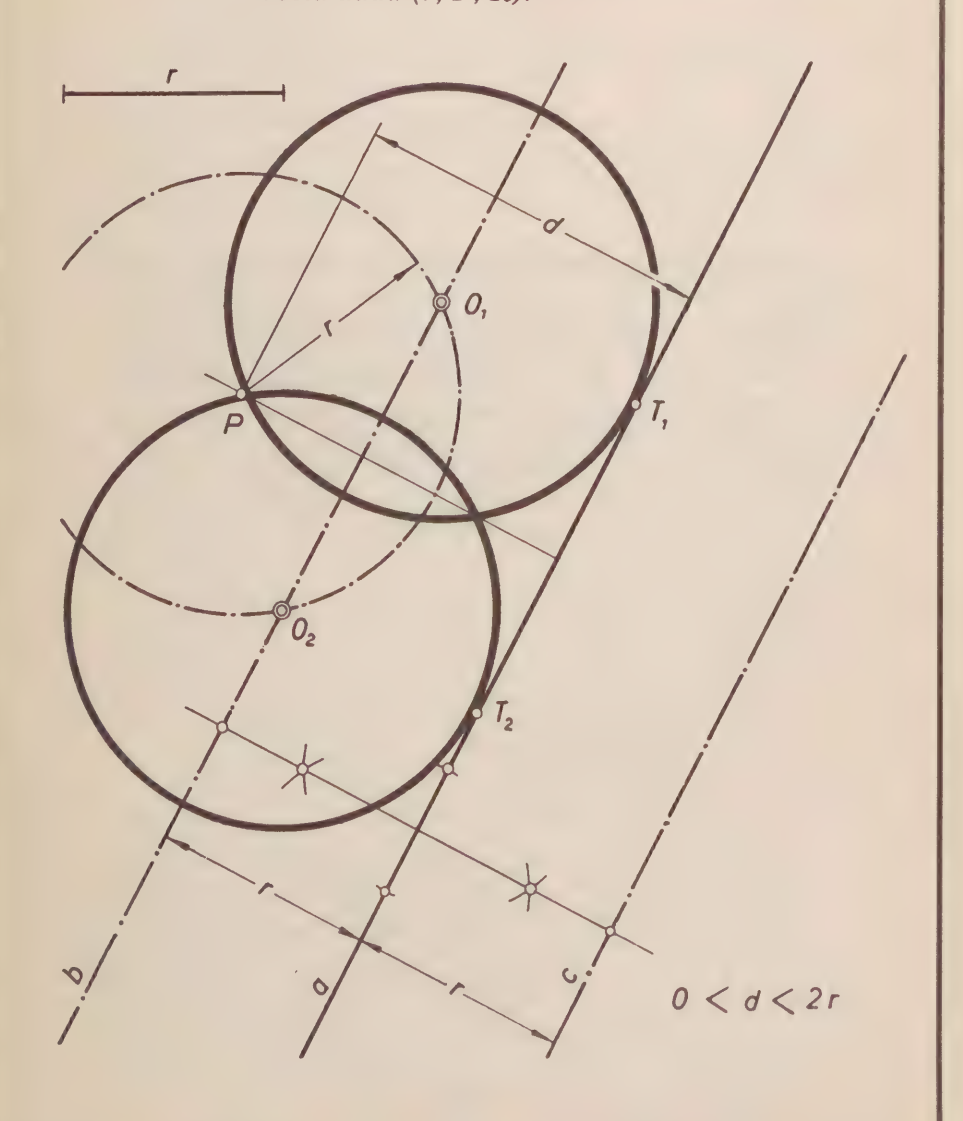
Figura 3

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una recta dada (r, P, R).

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una recta dada (r, P, R).*



1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema 2.º del Grupo **A** (**r**, **P**, **R**), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sea **P** el punto dado, **a** la recta conocida y **r** el radio de la circunferencia pedida.

2.1 Con radio **r** y centro **P**, trácese una circunferencia.

2.2 En ambos semiplanos de **a** y a la distancia **r**, trácense dos rectas **b** y **c** paralelas a **a** (ver fichas P. G. 2130 y P. G. 2121).

2.3 La circunferencia trazada según 2.1 y las rectas **b** y **c** trazadas según 2.2 podrán tener al menos un punto común **O**, que será el centro de la circunferencia buscada. El punto de tangencia **T** de ésta con la recta dada será el pié de la perpendicular trazada desde **O** a **a**.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo de la recta **a**, para que la circunferencia pedida pase por el punto **P**, su centro deberá hallarse en la circunferencia de radio **r** y centro **P**, ya que ésta tiene la propiedad enunciada en el l. g. número 2 de la ficha P. G. 2802.

3.2 Prescindiendo ahora del punto **P**, para que la circunferencia pedida sea tangente a la recta **a**, su centro deberá hallarse en una de las dos rectas trazadas según 2.2, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.º 12 de la ficha P. G. 2804.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en la circunferencia trazada según 2.1 y en una de las rectas trazadas según 2.2, dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

La solución de este problema depende fundamentalmente de las magnitudes relativas entre la distancia **d** de **P** a **a** y de la del radio **r** conocido. El problema planteado tendrá solución si existen puntos comunes entre la circunferencia trazada según 2.1 y las paralelas trazadas según 2.2, lo cual ocurrirá cuando sean tangentes (un punto común) o secantes (dos puntos comunes).

4.1 Si el punto **P** no pertenece a la recta (**d** > **0**) estará situado en uno de los semiplanos de **a**. Las condiciones para que existan puntos comunes entre la paralela **b** (recta situada en el mismo semiplano de **P** con respecto a **a**) cuya distancia a **P** es **d-r**, y la circunferencia trazada según 2.1,

están expresadas en el párrafo 4 de la ficha P. G. 2401. Aplicándolas al caso que nos ocupa, se verificará:

d — r > r	o sea	**d > 2r**	Recta exterior	Sin solución	(fig. 1)
d — r = r	o sea	**d = 2r**	Recta tangente	Una solución	(fig. 2)
d — r < r	o sea	**0 < d < 2r**	Recta secante	Dos soluciones	(fig. 3)

Si consideramos ahora la paralela **c** (recta situada en el semiplano opuesto de **P** con respecto a **a**) cuya distancia a **P** es **d + r**, veremos que siempre es exterior a la circunferencia trazada según 2.1, por ser **d + r > r** (ver ficha P. G. 2401), por lo que no existirán puntos comunes entre ambas líneas.

4.2 Si el punto **P** pertenece a la recta (**d = 0**), estará situado en ambos semiplanos de **a**, y la circunferencia trazada según 2.1 será tangente a las dos paralelas **b** y **c** trazadas según 2.2, por lo que el problema tendrá también *dos soluciones* (fig. 4).

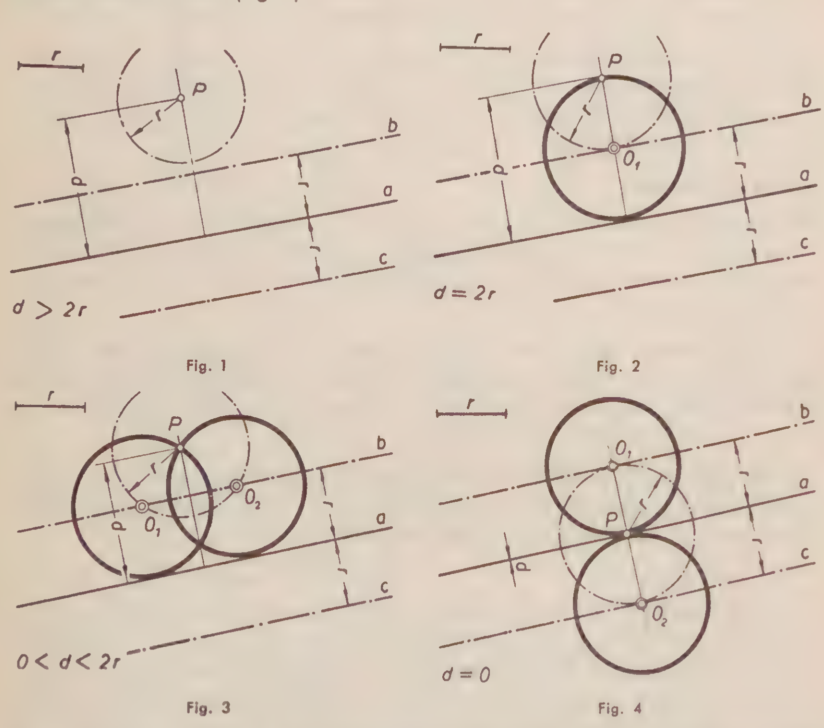


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

4.3 Como resumen de lo expuesto, estableceremos las siguientes relaciones:

d > 2r	Sin solución	(fig. 1)
d = 2r	Una solución	(fig. 2)
0 < d < 2r	Dos soluciones	(fig. 3)
d = 0	Dos soluciones	(fig. 4)

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Lugares geométricos

Ejemplos 5 al 8

1. Generalidades.

Siguiendo las directrices marcadas en la ficha P. G. 2802, continuamos en ésta el estudio de cuatro ejemplos más de lugares geométricos.

2. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 5 (RR).

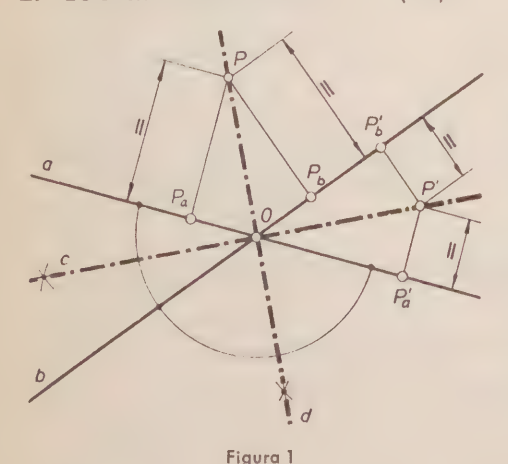


Figura 1

El l. g. de los puntos del plano equidistantes de dos rectas a y b secantes son las dos bisectrices c y d, mutuamente perpendiculares, de los ángulos que forman dichas rectas.

2.1. Demostración.

TEOREMA DIRECTO. *Hipótesis:* **c** y **d** son las bisectrices de los ángulos formados por las rectas **a** y **b** dadas. *Tesis:* Un punto cualquiera **P** (o **P'**) de una de ellas, equidista de los lados **a** y **b.**

2.11. Propiedad que se supone demostrada en Geometría racional y que sirve de base para la siguiente demostración: «Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales la hipotenusa y uno de sus ángulos agudos».

DEMOSTRACIÓN: Sea **P** (o **P'**) un punto cualquiera de la bisectriz **d** (o **c**). Tracemos por él rectas perpendiculares a las dos dadas **a** y **b** (ver ficha P. G. 2133) cuya intersección con éstas nos darán los pies de las perpendiculares P_a y P_b en las rectas **a** y **b** respectivamente (o los P'_a y P'_b); con ello se nos forman dos triángulos rectángulos $PP_a O$ y $PP_b O$ (o $P' P'_a O$ y $P' P'_b O$) que tienen la hipotenusa común e iguales respectivamente los ángulos $P_a OP$ y $P_b OP$ por construcción (o también los $P'_a OP'$ y $P'_b OP'$); por consiguiente, y en virtud de la propiedad 2.11 dichos triángulos son iguales. De la igualdad de ellos se deduce que $PP_a = PP_b$ (o $P'P'_a = P'P'_b$).

TEOREMA INVERSO. *Hipótesis,* Un punto **P** (o **P'**) de un plano, equidista de dos rectas **a** y **b** secantes. *Tesis:* Dicho punto **P** (o **P'**) pertenece a la bisectriz del ángulo formado por ellas.

2.12. Propiedad que se supone demostrada en Geometría racional y que sirve de base para la siguiente demostración: «Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto».

DEMOSTRACIÓN: Sea **P** (o **P'**) un punto del plano que equidista de dos rectas **a** y **b** del mismo, secantes entre sí. Tracemos por él rectas perpendiculares a las dos dadas (ver ficha P. G. 2133), cuya intersección con éstas nos darán los pies de las perpendiculares P_a y P_b en las rectas **a** y **b** respectivamente (o los P'_a y P'_b); unamos también **P** (o **P'**) con el vértice **O** del ángulo **ab.** Con ello se nos forman dos triángulos rectángulos PP_aO y PP_bO (o $P'P'_aO$ y $P'P'_bO$) que tienen la hipotenusa común y el cateto PP_a igual al PP_b , por hipótesis (o también el $P'P'_a$ igual al **P'** (P'_b); por consiguiente y en virtud de la propiedad 2.12, dichos triángulos rectángulos son iguales. De la igualdad de ellos se deduce que el ángulo POP_a es igual al POP_b (o el $P'OP'_a$ igual al $P'OP'_b$), lo que nos indica que la recta **OP** es bisectriz del ángulo formado por las **a** y **b** (y también la recta **OP'**).

3. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 6 (RR).

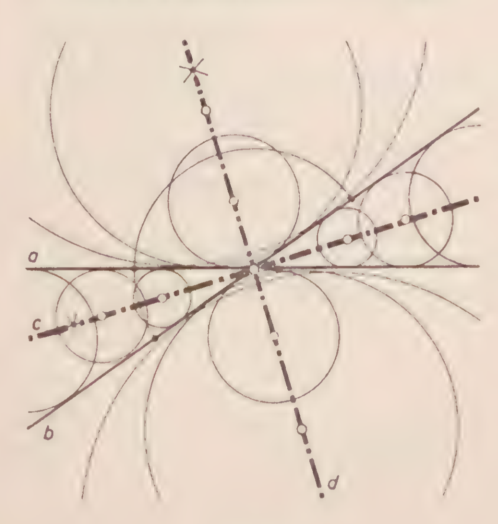


Figura 2

El l. g. de los centros de circunferencias que sean tangentes a dos rectas a y b, secantes entre sí son las dos bisectrices c y d, mutuamente perpendiculares, de los ángulos que forman dichas rectas.

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1, de la ficha P. G. 2802 este l. g. es equivalente al l. g. n.º 5, por lo que no damos su demostración.

4. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 7 (RR).

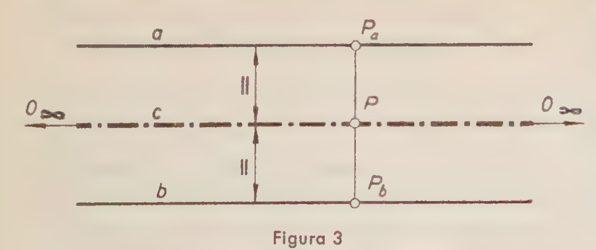


Figura 3

El l. g. de los puntos del plano equidistantes de dos rectas a y b paralelas entre sí es la paralela media c de ambas.

Este l. g. puede considerarse como caso límite del l. g. n.° 5, cuando el vértice **O** se aleja hacia el infinito (ver definición de paralelas en la ficha P. G. 2121). La paralela media **c** es la «bisectriz» del ángulo (nulo) formado por las rectas **a** y **b,** haciéndose imaginaria la «bisectriz» **d** (ver figura 1). La demostración dada en 2.1 sigue siendo válida para este caso límite.

5. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 8 (RR).

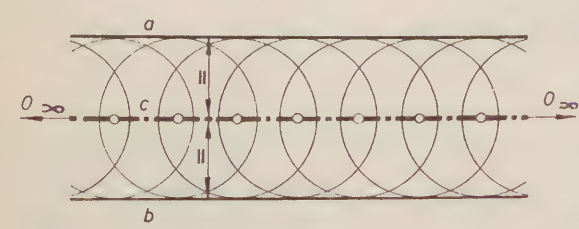


Figura 4

El l. g. de los centros de circunferencias que sean tangentes a dos rectas a y b, paralelas entre sí es la paralela media c de ambas.

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1, de la ficha P. G. 2802, este l. g. es equivalente al l. g. n.° 7, por lo que no damos su demostración.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

NORMALIZACIÓN DE DIBUJOS

Disposición de vistas y cortes

1. Generalidades.

El problema fundamental planteado en la ejecución de cualquier dibujo técnico, consiste en resolver la dificultad de representar en un plano que sólo tiene dos dimensiones, un objeto determinado que siempre tiene tres dimensiones.

En la ficha G. F. 1002 hemos estudiado en líneas generales los fundamentos de los llamados «Sistemas de representación» que por diferentes caminos llegan a conseguir el resultado deseado.

Entre ellos, destaca por su mayor difusión y aplicaciones técnicas el llamado «Sistema diédrico», que permite resolver los problemas del espacio con la mayor exactitud. Consiste esencialmente en proyectar ortogonalmente el objeto considerado sobre dos planos perpendiculares, y después de obtenidas estas proyecciones se hace girar uno de los planos con su proyección, hasta que coincida con el plano del otro.

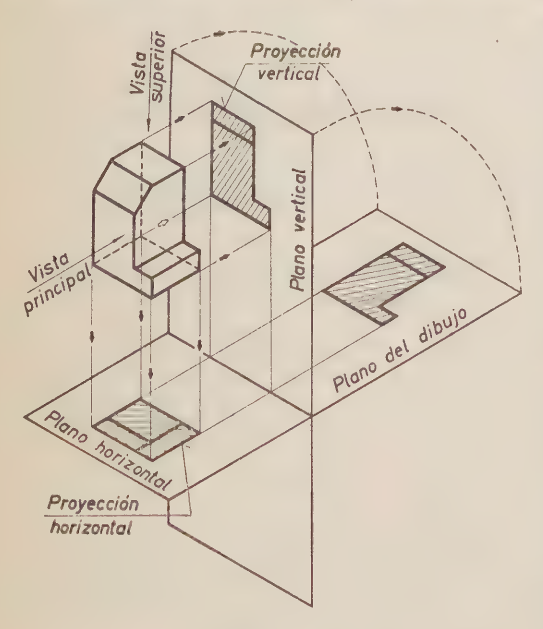


Figura 1

En la práctica del dibujo técnico, la operación de proyectar ortogonalmente un objeto sobre un plano, es equivalente a la representación de dicho objeto visto en una dirección determinada, supuesto el observador situado delante de dicho objeto.*

En el sistema diédrico se demuestra que dos proyecciones de un objeto son necesarias y suficientes para que la representación del mismo quede completamente determinada; estas proyecciones son las llamadas «vertical» y «horizontal», o sea las efectuadas sobre un plano que llamamos vertical por suponer que sea ésta su posición en el espacio, y sobre otro plano perpendicular al anterior que a su vez suponemos tenga en el espacio la posición horizontal.

* Esto no es rigurosamente cierto, a no ser que el observador estuviese alejado infinitamente del objeto. No obstante, cuando se trata de objetos pequeños, la vista del mismo en una dirección prefijada es sensiblemente igual a su proyección ortogonal, lo que justifica el empleo de la denominación de vista en una determinada dirección.

En el lenguaje técnico, la proyección vertical es equivalente a la llamada **vista principal** en la que el observador se supone situado *delante* del objeto (fig. 1), y la proyección horizontal es equivalente a la llamada **vista superior** en la que el observador se supone situado *encima* del objeto.

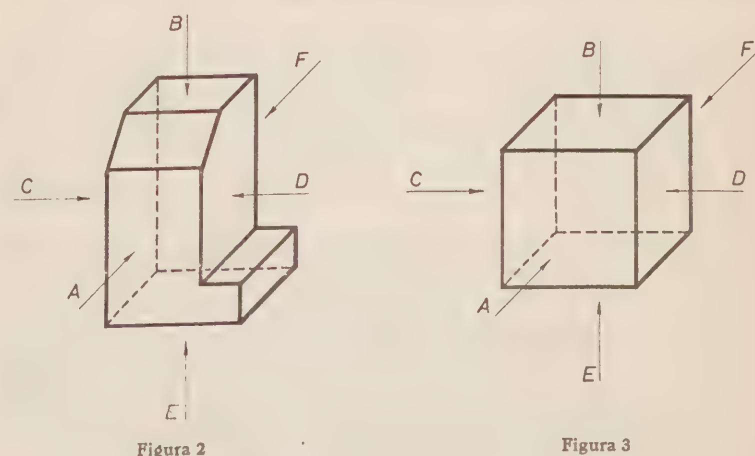


Figura 2 Figura 3

Aun cuando ya hemos dicho anteriormente que con las vistas principal y superior quedaría definida completamente la representación de un objeto cualquiera, en la práctica del dibujo técnico no se limita a estas dos vistas, ya que en muchos casos la lectura del dibujo resulta penosa y difícil de interpretar. Cuando esto suceda, se amplía el número de vistas del objeto hasta llegar a un máximo de seis que son las direcciones perpendiculares entre sí en que puede mirarse una pieza (fig. 2) y que corresponden a las posiciones en que pueden verse de frente las seis caras de un cubo (fig. 3).

Las denominaciones técnicas de estas seis vistas son las siguientes:

1)	Vista en la dirección	**A**	**Vista principal**
2)	» » »	**B**	**Vista superior**
3)	» » »	**C**	**Vista lateral izquierda**
4)	» » »	**D**	**Vista lateral derecha**
5)	» » »	**E**	**Vista inferior**
6)	» » »	**F**	**Vista posterior**

Cuando las piezas formen conjunto o presenten espacios huecos que interese conocer con todo detalle, estas vistas no dan la claridad deseada, ya que el observador está situado siempre en el exterior del objeto. En estos casos se recurre al artificio de los llamados «cortes», que consisten

esencialmente en suponer *cortada idealmente* la pieza por uno o varios planos, en direcciones convenientes,.y representar la vista de la sección junto con el resto de la pieza que queda detrás del plano secante.

2. Normalización de las vistas de un dibujo técnico.

Las disposiciones para la colocación en el plano del dibujo de las seis vistas posibles de un objeto cualquiera, están normalizadas en la norma española UNE 1030, y también en la alemana DIN 6 cuya edición del 10 - 56 recoge la normalización de la antigua norma DIN 36 referente a tema análogo y que ha sido absorbida por la DIN 6; también la recomendación «ISO R 128, Dibujo técnico, Sistemas de representación» trata con detalle este tema.

Todas estas normas son coincidentes en cuanto a la disposición de vistas y sistemas empleados, y varían ligeramente en cuanto a detalles de representación y aplicación de cortes, que estudiaremos posteriormente.

Para colocar correctamente las vistas posibles de un objeto, es preciso fijar previamente la posición de la llamada vista principal. En dibujos de conjunto, los objetos se deben representar siempre en la posición de su empleo, o sea se dibujan verticalmente cuando se empleen en posición vertical, y horizontalmente cuando se empleen en posición horizontal.

Cuando los objetos sean móviles, pueden dibujarse en cualquier posición, como p. e. piezas giratorias (tornillos, casquillos, etc.) siendo preferente el dibujo en la posición de fabricación.

Para la elección de la vista principal debe colocarse el observador en la posición en que se vea con más claridad la forma y detalles del objeto a representar. Elegida la dirección de la vista principal, quedan automáticamente determinadas las posiciones que han de ocupar en el dibujo las restantes vistas.

Para la colocación de estas vistas restantes en un número máximo de cinco, se han normalizado dos sistemas fundamentalmente distintos; el llamado *Sistema europeo* o del primer diedro, y el *Sistema americano* o del segundo diedro. Para distinguir uno de otro en el dibujo, existen símbolos distintivos adecuados que deben de incluirse, en caso de duda, en los recuadros de rotulación del plano en un espacio previsto cercano al de indicación de la escala.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Lugares geométricos

Ejemplos 9 al 12

1. Generalidades.

Continuamos en esta ficha el estudio de los l. g. n.º 9 al 12, de acuerdo con las directrices marcadas en la ficha P. G. 2802.

2. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 9 (C).

El l. g. de los puntos del plano que equidistan una magnitud dada r de una circunferencia de radio c y centro O de dicho plano son

dos circunferencias de centro O y radios c + r y c — r respectivamente.

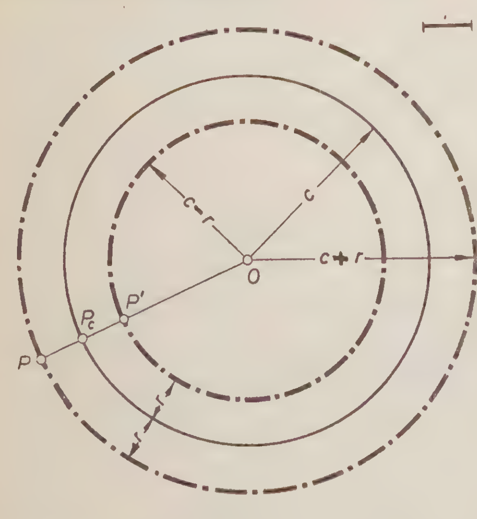


Figura 1

2.1. Demostración.

TEOREMA DIRECTO. *Hipótesis:* Tracemos dos circunferencias concéntricas con la dada y radios **c + r** y **c — r** respectivamente. *Tesis:* Cualquier punto **P** de la primera, o **P'** de la segunda, equidista de la dada la magnitud **r.**

DEMOSTRACIÓN: Sabiendo que la distancia de un punto a una circunferencia se mide por la longitud del segmento comprendido entre dicho punto y el extremo del radio que pasa por él (ver párrafo 1, ficha P. G. 2302) bastará unir **P** con **O**, hasta que corte en P_c a la circunferencia dada (fig. 1), verificándose que $OP = c + r$ y $OP_c = c$; de donde $OP - OP_c = PP_c = c + r - c = r$; lo que nos demuestra que el punto **P** equidista de la circunferencia dada la magnitud **r.**

De igual forma demostraríamos que **P'** situado en la circunferencia de radio **c — r** también equidista de la dada la magnitud **r.**

TEOREMA CONTRARIO. *Hipótesis:* Tracemos dos circunferencias concéntricas con la dada y radios **c + r** y **c — r** respectivamente. *Tesis:* Cualquier punto **P** o **P'** no situados en ellas, no equidista de ésta la magnitud **r.**

DEMOSTRACIÓN: El punto **P**, al no estar situado en la circunferencia de radio **c + r,** será interior o exterior a ésta y por consiguiente su distancia **OP** al centro **O** será menor o mayor que **c + r**, o sea que $OP \gtrless c + r$. Uniendo **P** con **O** hasta cortar a la circunferencia dada en P_c, se verificará que $OP_c = c$; restando de la desigualdad anterior esta igualdad, se verificará que $OP - OP_c = PP_c \lesseqgtr c + r - c = r$, lo que nos demuestra que el punto **P** no perteneciente a la circunferencia de centro **O** y radio **c + r** no equidista de la dada la magnitud **r.**

De igual forma demostraríamos que **P′** no situado en la circunferencia de radio **c — r** concéntrica con la dada, no equidista de ésta la magnitud **r.**

3. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 10 (C).

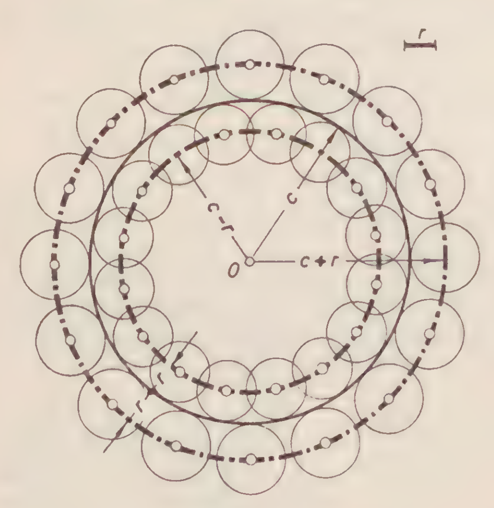


Figura 2

El l. g. de los centros de circunferencias que sean tangentes a una circunferencia dada.
son
dos circunferencias de centro O y radios c + r y c — r respectivamente.

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1, de la ficha P. G. 2802, este l. g. es equivalente al l. g. n.º 9, por lo que no damos su demostración.

4. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 11 (R).

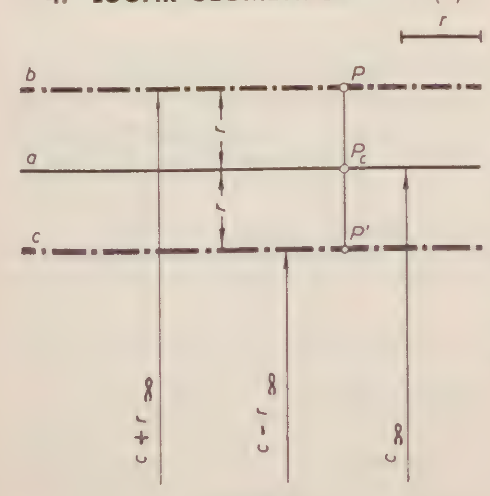


Figura 3

El l. g. de los puntos del plano que equidistan una magnitud r de una recta dada
son
dos rectas b y c paralelas a la dada y trazadas en ambos semiplanos de ésta a la distancia r.

Este l. g. puede considerarse como caso límite del l. g. n.° 9 (fig. 1), cuando el radio **c** aumenta indefinidamente. La transformación que experimenta la figura 1, al hacerse infinito el radio **c**, está representada en la figura n.° 3; la circunferencia dada, así como las concéntricas de radios **c + r** y **c — r**, se transforman en las rectas paralelas **a**, **b** y **c** respectivamente. La demostración dada en 6.1 subsiste para este caso límite.

5. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 12 (R).

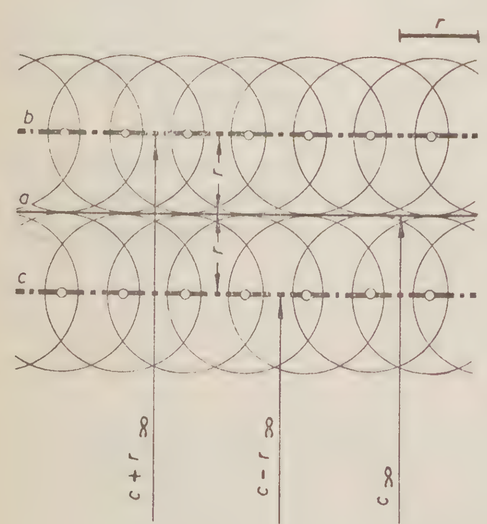


Figura 4

El l. g. de los centros de circunferencias que sean tangentes a una recta a dada son dos rectas b y c paralelas a la dada a y trazada en ambos semiplanos de ésta a la distancia r.

Análogamente al anterior, este l. g. puede considerarse como caso límite del l. g. n.° 10 (fig. 2), cuando el radio **c** aumenta indefinidamente. La transformación que experimenta la figura 2, al hacerse infinito el radio **c**, está representada en la figura n.° 4; la circunferencia dada, así como las concéntricas de radios **c + r** y **c — r**, se tranforman en las rectas paralelas **a**, **b** y **c** respectivamente.

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1, de la ficha P. G. 2802, este l. g. es equivalente al l. g. n.° 11, por lo que omitimos su demostración.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

DISPOSICIÓN DE VISTAS Y CORTES

(continuación)

2.1 Normalización de las vistas en el sistema europeo.

En este sistema se colocarán las vistas de la pieza, con respecto a la vista principal **A**, de la siguiente manera:

1) Vista superior **B**, debajo de la vista principal.
2) Vista lateral izquierda **C**, a la derecha de la vista principal.
3) Vista lateral derecha **D**, a la izquierda de la vista principal.
4) Vista inferior **E**, encima de la vista principal.
5) Vista posterior **F**, preferentemente a la derecha de la vista lateral izquierda (puede también colocarse a la izquierda de la vista lateral derecha).

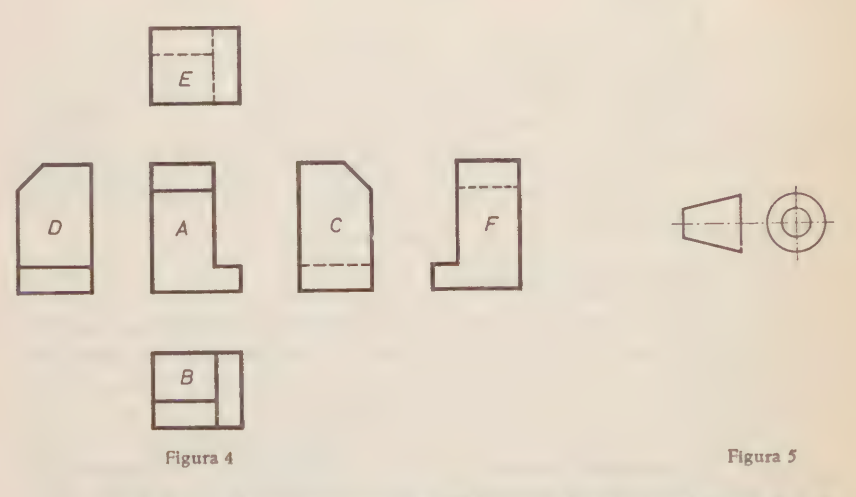


Figura 4 Figura 5

En la figura 4, representamos gráficamente las seis posiciones **A** a **F** de una pieza en el sistema europeo, e indicamos en la figura 5 el símbolo distintivo de este sistema.

2.2 Normalización de las vistas en el sistema americano.

Este sistema difiere fundamentalmente del europeo; la colocación de las vistas de la pieza con respecto a la vista principal **A**, es la siguiente:

1) Vista superior **B**, encima de la vista principal.
2) Vista lateral izquierda **C**, a la izquierda de la vista principal.

3) Vista lateral derecha **D,** a la derecha de la vista principal.

4) Vista inferior **E,** debajo de la vista principal.

5) Vista posterior **F,** preferentemente a la derecha de la vista lateral derecha **D** (puede también colocarse a la izquierda de la vista lateral izquierda).

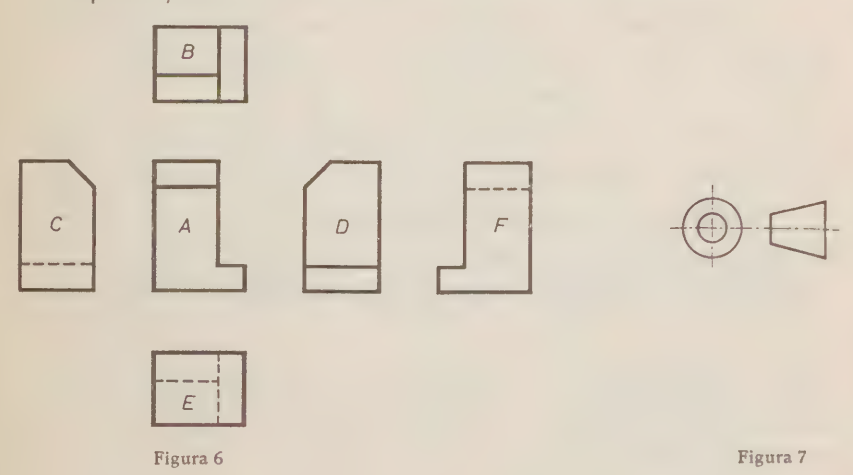


Figura 6

Figura 7

En la figura 6, representamos gráficamente las seis posiciones **A** a **F** de una pieza en el sistema americano, e indicamos en la figura 7 el símbolo distintivo de este sistema.

3. Número de vistas necesarias.

Para fijar el número de vistas necesarias en la ejecución de cualquier dibujo técnico, debe seguirse el criterio general de utilizar el **mínimo número de ellas** compatible con la claridad de ejecución y sin que pueda

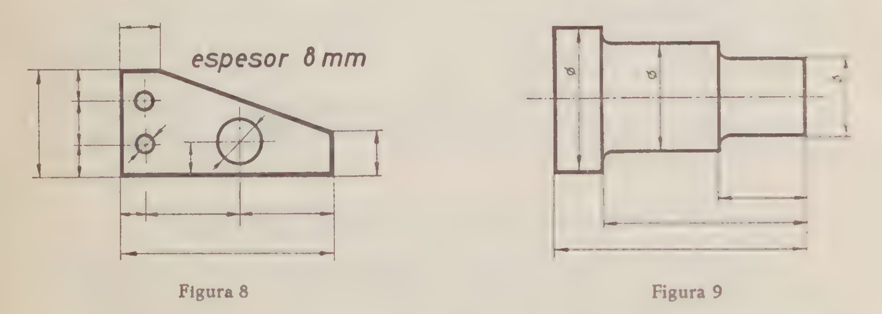


Figura 8

Figura 9

haber la menor duda en cuanto a la interpretación, tanto de la forma del objeto representado como de su correcta y completa acotación.

En dibujos de objetos o piezas de espesor constante es suficiente tan sólo la vista principal (fig. 8), consignando en lugar adecuado y visible el espesor de dicha pieza; también es suficiente una sola vista en piezas tor-

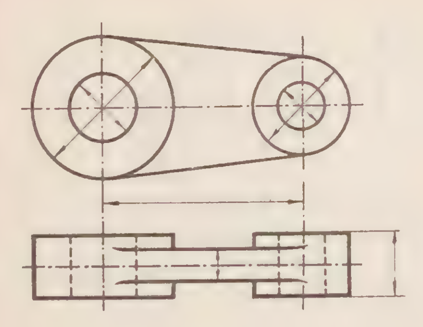


Figura 10

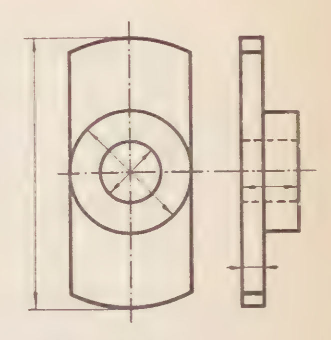


Figura 11

neadas o figuras de revolución, mediante la consignación del símbolo de diámetro, esfera, etc., en las cotas correspondientes (fig. 9); también se representan con una sola vista piezas normalizadas, tales como tornillos, arandelas, tuercas, etc. en las que bastará consignar la designación normalizada adecuada.

Salvo estos casos particulares, es necesario en general más de una vista. Son mucho los casos de piezas sencillas en que con dos vistas queda correctamente definida la pieza, bien con las vistas principal y superior (fig. 10) o con las vistas principal y lateral izquierda (fig. 11), que en el sistema europeo son las corrientemente usadas.

Los casos que con más frecuencia se presentan en el dibujo técnico, son los que exigen el empleo de tres vistas, tales como la principal, la superior y la lateral izquierda (fig. 12). Por su uso frecuente, a estas tres vistas fundamentales se las denominan vulgar y también técnicamente de la forma siguiente: A la vista principal, se la llama **alzado;** a la superior **planta** y a la lateral izquierda, **perfil.**

Se da con muy poca frecuencia la necesidad de emplear cuatro, cinco o seis vistas de un mismo objeto; solo se utilizan estas representaciones en piezas muy complicadas.

Si no es posible representar con claridad una pieza, incluso con las seis vistas máximas admitidas, por no quedar perfectamente definidas posibles partes interiores del mismo, será valiosa la aplicación de representa-

ciones de cortes. Un corte es la división imaginaria de un objeto por uno o varios planos perpendiculares al plano del dibujo.

Sus formas y aplicaciones son muy variadas y deben emplearse tan

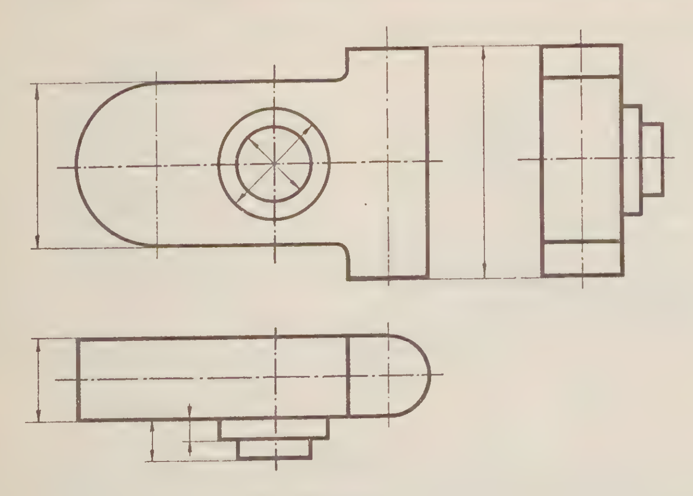


Figura 12

solo cuando se consiga mayor claridad de representación. En hojas sucesivas estudiaremos las disposiciones de ellos normalizadas.

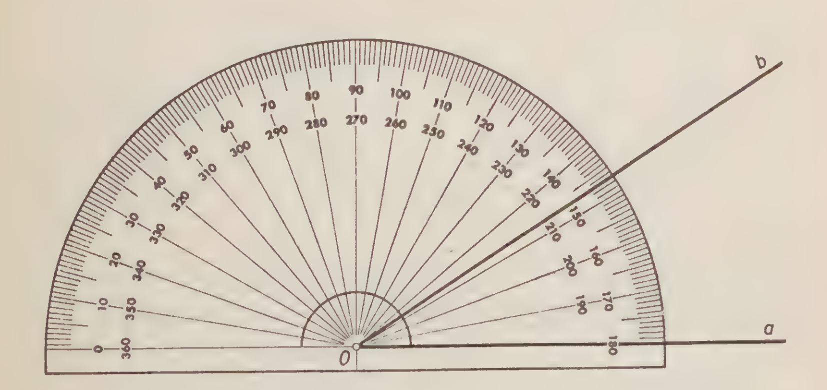
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

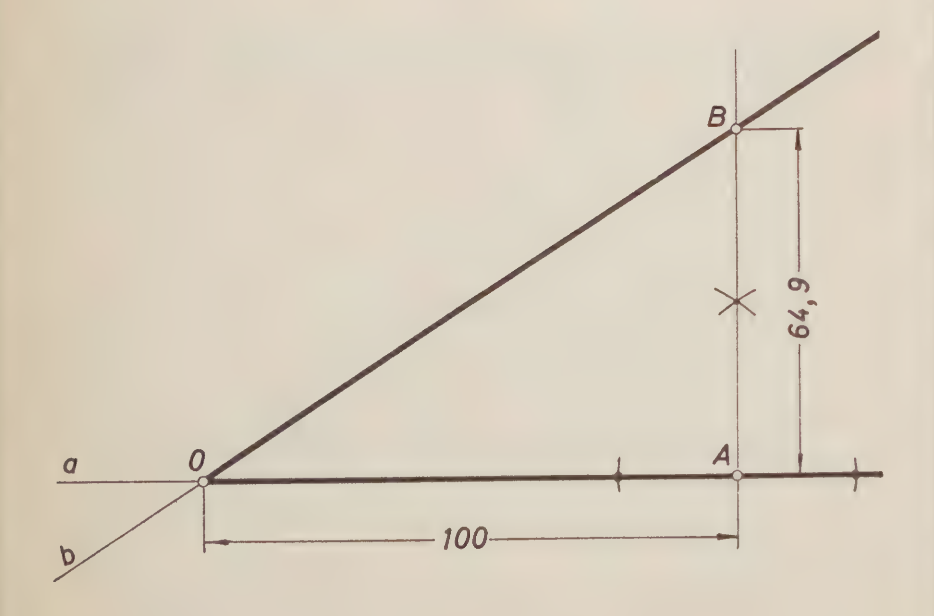
PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir un ángulo dada su amplitud en grados.

Ficha n.º 60	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2110 **Hoja 2**

ENUNCIADO: *Construir un ángulo dada su amplitud en grados.*





Reproducción prohibida	Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla	Enero 1966

1. Generalidades.

En la práctica del dibujo técnico, surge con mucha frecuencia el tener que dibujar ángulos en los que la medida de su amplitud viene expresada en grados sexagesimales o centesimales.

En la ficha P. G. 2110 hemos dado con toda generalidad la definición de ángulo, su clasificación y división. También hemos estudiado en dicha ficha la construcción de un ángulo igual a otro dado gráficamente, sin que para ello se precise el conocimiento de su amplitud en grados y fracciones de éstos.

La construcción de un ángulo cuya graduación es conocida puede hacerse por dos procedimientos fundamentalmente distintos. En el primero se utiliza un instrumento adecuado llamado *transportador de ángulos*, y en el segundo se utiliza tan sólo la regla graduada y el compás (o la escuadra). Ambos sirven para resolver el problema propuesto de una forma general y para valores cualesquiera de su amplitud. No obstante, existen numerosos valores particulares de ángulos (90°, 60°, 45°, 30°, etc.) que mediante sencillos trazados fundados en propiedades geométricas y por bisecciones sucesivas de éstos, permite representarlos gráficamente con toda precisión, sin ningún aparato de medida, sino tan sólo con la regla y el compás; de estos trazados especiales nos ocuparemos en su momento oportuno.

2. Empleo del transportador de ángulos.

El transportador de ángulos es un simple instrumento de medida de éstos, que sirve indistintamente para representar gráficamente un ángulo cuya amplitud viene expresado en grados sexagesimales o centesimales, y también para medir o comprobar dicha amplitud cuando el ángulo esté dibujado.

Son de forma semicircular o rectangular, de material transparente (celuloide) y con una graduación en su borde en grados y medios grados (sexagesimales o centesimales). La representación de un transportador de graduación sexagesimal está efectuada en la figura superior; para facilitar su lectura, van consignadas cifras cada diez grados, en el sentido negativo (exterior) de 0° a 180° y en el sentido positivo (interior) de 180° a 360°. El centro **O** de la circunferencia base está situado en el borde inferior del instrumento y marcado netamente con un trazo.

Su empleo se deduce fácilmente de dicha figura; en ella puede apreciarse la coincidencia de un lado **a** y vértice **O** del ángulo, con el borde inferior y centro del transportador. La lectura de la graduación del ángulo se hace en el borde exterior por donde pasa el otro lado **b** del ángulo dado.

La exactitud de la construcción de un ángulo con el transportador, aumenta con el tamaño de éste y exige una uniforme separación de sus di-

visiones así como un mínimo espesor en los trazos de éstas. Con un buen transportador puede obtenerse la lectura con 15' de aproximación. Si es necesaria más exactitud se utilizará el trazado que damos a continuación, cuyo fundamento teórico ha sido expuesto con todo detalle en la ficha P. G. 2002, párrafo 4.

3. Empleo de la regla graduada y escuadra o compás.

Estos dos simples instrumentos nos dan la posibilidad de construir con toda sencillez y exactitud cualquier ángulo de graduación conocida, cuyo trazado hemos representado en la figura inferior.

3.1 Supongamos para fijar ideas, que queremos construir un ángulo de 33°. En la tabla de pendientes incluída en la hoja 3 de esta ficha, buscaremos el valor correspondiente a la graduación dada; dicho valor es del 64,9 %.

3.2 Sobre una recta **a** y a partir de un punto **O** de ella, tomaremos 100 mm, lo que nos situará el punto **A.**

3.3 Tracemos por **A** una perpendicular a **OA,** con las escuadras, o si se requiere gran exactitud, con el compás (ver ficha P. G. 2130).

3.4 A partir de **A** y sobre la perpendicular trazada según 3.3, tómense 64,9 mm. (el valor de la pendiente), con lo que obtendremos el punto **B.**

3.5 Unase **B** con **O.** El ángulo **BOA** será el pedido.

Como acabamos de ver, este trazado del ángulo es de gran sencillez y sumamente práctico, uniendo a estas ventajas, su exactitud. Si los lados del ángulo a construir fuesen relativamente grandes, el trazado hecho con el transportador de ángulos puede dar lugar a errores inadmisibles en el dibujo a realizar. Con el trazado por el procedimiento de la pendiente este error puede hacerse tan pequeño como se desee; para disminuirlo hasta el límite requerido basta tomar para la distancia **OA** un múltiplo cualquiera de 100 mm (2 x 100, 3 x 100, etc.) y para la distancia **OB** el mismo múltiplo de la pendiente (2 x 64,9, 3 x 64,9, etc.), o bien expresar sus valores en unidades mayores del milímetro (centímetro, decímetro, etc.).

Por el contrario, cuando los valores del ángulo dado se aproximen al ángulo recto, los correspondientes de la pendiente son números relativamente grandes (ver tabla en hoja 3 de esta misma ficha), y en este caso pueden tomarse los valores de **OA** como submúltiplos de 100 mm (100 : 2; 100 : 4, etc.) y los de **OB** como los mismos submúltiplos de la pendiente (64,9 : 2; 64,9 : 4, etc.), con lo que se consigue que el trazado, sin perder exactitud, caiga dentro de los límites del papel del dibujo.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

TABLA DE PENDIENTES

de una recta con respecto a otra, para la construcción de un ángulo dada su amplitud en grados.

Ficha n.º 61	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2110 **Hoja 3**

TABLA DE VALORES

DE LA PENDIENTE DE ÁNGULOS COMPRENDIDOS ENTRE 0º Y 45º

Grados	Pendientes en tantos por ciento (°/o)					
	0'	**10'**	**20'**	**30'**	**40'**	**50'**
0	0,0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
1	1,7	2,0	2,3	2,6	2,9	3,2
2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	4,9
3	5,2	5,5	5,8	6,1	6,4	6,7
4	7,0	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5
5	8,7	9,0	9,3	9,6	9,9	10,2
6	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	12,0
7	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8
8	14,1	14,4	14,6	14,9	15,2	15,5
9	15,8	16,1	16,4	16,7	17,0	17,3
10	17,6	17,9	18,2	18,5	18,8	19,1
11	19,4	19,7	20,0	20,3	20,6	21,0
12	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8
13	23,1	23,4	23,7	24,0	24,3	24,6
14	24,9	25,2	25,6	25,9	26,2	26,5
15	26,8	27,1	27,4	27,7	28,0	28,4
16	28,7	29,0	29,3	29,6	29,9	30,3
17	30,6	30,9	31,2	31,5	31,9	32,2
18	32,5	32,8	33,1	33,5	33,8	34,1
19	34,4	34,8	35,1	35,4	35,7	36,1
20	36,4	36,7	37,1	37,4	37,7	38,1
21	38,4	38,7	39,1	39,4	39,7	40,1
22	40,4	40,7	41,1	41,4	41,8	42,1
23	42,4	42,8	43,1	43,5	43,8	44,2
24	44,5	44,9	45,2	45,6	45,9	46,3
25	46,6	47,0	47,3	47,7	48,1	48,4
26	48,8	49,1	49,5	49,9	50,2	50,6
27	51,0	51,3	51,7	52,1	52,4	52,8
28	53,2	53,5	53,9	54,3	54,7	55,1
29	55,4	55,8	56,2	56,6	57,0	57,3
30	57,7	58,1	58,5	58,9	59,3	59,7
31	60,1	60,5	60,9	61,3	61,7	62,1
32	62,5	62,9	63,3	63,7	64,1	64,5
33	64,9	65,4	65,8	66,2	66,6	67,0
34	67,5	67,9	68,3	68,7	69,2	69,6
35	70,0	70,5	70,9	71,3	71,8	72,2
36	72,7	73,1	73,5	74,0	74,4	74,9
37	75,4	75,8	76,3	76,7	77,2	77,7
38	78,1	78,6	79,1	79,5	80,0	80,5
39	81,0	81,5	81,9	82,4	82,9	83,4
40	83,9	84,4	84,9	85,4	85,9	86,4
41	86,9	87,4	88,0	88,5	89,0	89,5
42	90,0	90,6	91,1	91,6	92,2	92,7
43	93,3	93,8	94,3	94,9	95,5	96,0
44	96,6	97,1	97,7	98,3	98,8	99,4
45	100,0	—	—	—	—	—

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla

Enero 1966

Ficha n.º 61	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2110 **Hoja 3**

TABLA DE VALORES

DE LA PENDIENTE DE ÁNGULOS COMPRENDIDOS ENTRE 45° Y 90°

Grados	Pendientes en tantos por ciento (%)					
	0'	**10'**	**20'**	**30'**	**40'**	**50'**
45	100,0	100,6	101,2	101,8	102,4	103,0
46	103,6	104,2	104,8	105,4	106,0	106,6
47	107,2	107,9	108,5	109,1	109,8	110,4
48	111,1	111,7	112,4	113,0	113,7	114,4
49	115,0	115,7	116,4	117,1	117,8	118,5
50	119,2	119,9	120,6	121,3	122,0	122,8
51	123,5	124,2	125,0	125,7	126,5	127,2
52	128,0	128,8	129,5	130,3	131,1	131,9
53	132,7	133,5	134,3	135,1	136,0	136,8
54	137,6	138,5	139,3	140,2	141,1	141,9
55	142,8	143,7	144,6	145,5	146,4	147,3
56	148,3	149,2	150,1	151,1	152,0	153,0
57	154,0	155,0	156,0	157,0	158,0	159,0
58	160,0	161,1	162,1	163,2	164,3	165,3
59	166,4	167,5	168,6	169,8	170,9	172,0
60	173,2	174,4	175,6	176,7	178,0	179,2
61	180,4	181,6	182,9	184,2	185,5	186,8
62	188,1	189,4	190,7	192,1	193,5	194,9
63	196,3	197,7	199,1	200,6	202,0	203,5
64	205,0	206,6	208,1	209,7	211,2	212,8
65	214,5	216,1	217,7	219,4	221,1	222,9
66	224,6	226,4	228,2	230,0	231,8	233,7
67	235,6	237,5	239,4	241,4	243,4	245,5
68	247,5	249,6	251,7	253,9	256,0	258,3
69	260,5	262,8	265,1	267,5	269,9	272,3
70	274,7	277,3	279,8	282,4	285,0	287,7
71	290,4	293,2	296,0	298,9	301,8	304,7
72	307,8	310,8	314,0	317,2	320,4	323,7
73	327,1	330,5	334,0	337,6	341,2	345,0
74	348,7	352,6	356,6	360,6	364,7	368,9
75	373,2	377,6	382,1	386,7	391,4	396,2
76	401,1	406,1	411,3	416,5	421,9	427,5
77	433,1	439,0	444,9	451,1	457,4	463,8
78	470,5	477,3	484,3	491,5	498,9	506,6
79	514,5	522,6	530,9	539,6	548,5	557,6
80	567,1	576,9	587,1	597,6	608,4	619,7
81	631,4	643,5	656,1	669,1	682,7	696,8
82	711,5	726,9	742,9	759,6	777,0	795,3
83	814,4	834,5	855,6	877,7	901,0	925,5
84	951,4	978,8	1007,8	1038,5	1071,2	1105,9
85	1143,0	1182,6	1225,1	1270,6	1319,7	1372,7
86	1430,1	1492,4	1560,5	1635,0	1716,9	1807,5
87	1908,1	2020,6	2147,0	2290,4	2454,2	2643,2
88	2863,6	3124,2	3436,8	3818,8	4296,4	4910,4
89	5729,0	6875,0	8594,0	11458,9	17188,5	34377,4
90	∞	—	—	—	—	—

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla.

Enero 1966

1. Generalidades.

La tabla de pendientes incluída en esta ficha, sirve de base y consulta para la construcción de un ángulo cualquiera de graduación conocida, empleando para ello el procedimiento de la pendiente. Dicha construcción tiene el fundamento teórico dado en la ficha P. G. 2002, párrafo 4, y su trazado lo hemos expuesto en el párrafo 3, hoja 2 de esta misma ficha.

Los valores de la pendiente de una recta con respecto a otra, han sido expresados en tantos por ciento, y varían desde 0° a 90°, con intervalos de 10 en 10 minutos, lo cual da suficiente aproximación para la casi totalidad de sus aplicaciones al dibujo técnico.

No obstante, cuando los trazados sean de grandes dimensiones, y se requiere al mismo tiempo mucha exactitud, como sucede a veces en construcción naval o en estructuras metálicas de cubiertas, etc., no es suficiente la aproximación dada en esta tabla. En estos casos excepcionales pueden obtenerse valores intermedios no dados en la misma, por interpolación entre dos consecutivos de ellas, admitiendo existe proporcionalidad entre los valores intermedios, lo cual no es rigurosamente cierto, pero que puede aceptarse prácticamente.

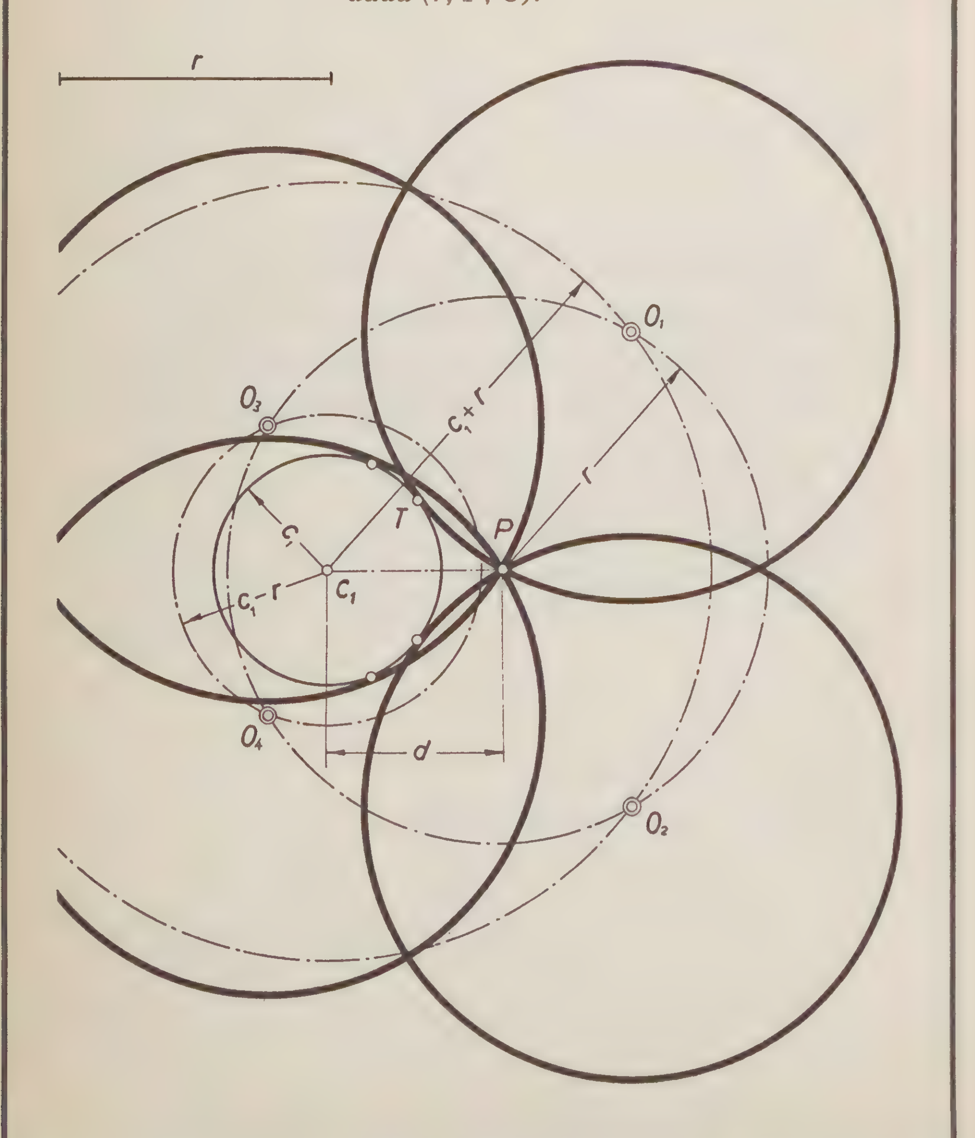
Cabe evitar la interpolación de valores intermedios de la tabla dada en esta ficha, si se dispone de otra con los valores naturales de la tangente trigonométrica de ángulos, ya que según vimos en la ficha P. G. 2002, párrafo 4, la pendiente de una recta con respecto a otra es igual a la tangente trigonométrica del ángulo formado por ellas, bastando multiplicar los valores de la tangente por el número 100, para obtener los de la pendiente en tantos por ciento.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una circunferencia dada (r, P, C).

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que pase por un punto y sea tangente a una circunferencia dada (r, P, C).*



1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema 3.º del Grupo A (r, P, C), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **P** el punto dado, c_1 el radio de la circunferencia conocida y **r** el radio de la pedida.

2.1 Con centro en **P** y radio **r**, trácese una circunferencia.

2.2 Con centro en C_1 y radios $c_1 + r$, $c_1 - r$, trácense otras dos circunferencias concéntricas con la dada.

2.3 Estas tres circunferencias podrán tener al menos un punto común **O** que será el centro de la circunferencia buscada. El punto de tangencia **T** de ésta con la dada, estará en la línea de los centros OC_1.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo de la circunferencia C_1, para que la circunferencia pedida pase por el punto **P**, su centro deberá hallarse en la circunferencia trazada según 2.1, ya que ella tiene la propiedad enunciada en el l. g. n.º 2 de la ficha P. G. 2802.

3.2 Prescindiendo ahora del punto **P**, para que la circunferencia pedida sea tangente a la dada C_1, su centro deberá hallarse en una de las circunferencias trazadas según 2.2, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.º 10 de la ficha P. G. 2804.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambos l. g., dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

La solución de este problema depende fundamentalmente de las magnitudes relativas entre la distancia **d** de **P** a C_1 y de la del radio **r** con respecto a c_1.

El problema planteado tendrá solución si existen puntos comunes entre las circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2, lo cual ocurrirá cuando sean tangentes (un punto común) o secantes (dos puntos comunes). Como son tres las circunferencias auxiliares que nos definen los centros de las buscadas, al comparar la primera con cada una de las dos segundas, podrán tener como máximo dos puntos comunes en cada una de éstas (circunferencias secantes) y por consiguiente podrá haber hasta **cuatro soluciones** distintas, como son las que existen en el ejemplo propuesto en esta ficha.

Este número máximo de soluciones puede disminuir progresivamente de **cuatro** a **cero** soluciones, pudiendo presentarse los casos que a continuación detallamos. Para todos ellos es válido el trazado dado en el párrafo 2.

4.1 Punto exterior a la circunferencia ($d > c_1$).

Cuando sea $\mathbf{d} > \mathbf{c}_1$ el punto dado **P** será exterior a $\mathbf{C}_1$ (ver ficha P. G. 2401, párrafo 3). Comparando el radio dado **r** con las distancias **d** y $\mathbf{c}_1$, tendremos los siguientes casos posibles:

4.11	$2r > d + c_1$	4 soluciones.
4.12	$2r = d + c_1$	3 soluciones.
4.13	$d + c_1 > 2r > d - c_1$	2 soluciones.
4.14	$2r = d - c_1$	1 solución.
4.15	$2r < d - c_1$	Sin solución.

4.2 Punto en la circunferencia ($d = c_1$).

Para que el punto dado **P** esté en la circunferencia $\mathbf{C}_1$ es preciso que se cumpla la relación $\mathbf{d} = \mathbf{c}_1$ (ver ficha P. G. 2401, párrafo 3). Comparando el radio **r** con las distancias **d** y $\mathbf{c}_1$, tendremos los siguientes casos posibles:

4.21	$r > d$	2 soluciones.
4.22	$r = d$	1 solución.
4.23	$r < d$	Sin solución.

4.3 Punto interior a la circunferencia ($d < c_1$).

Cuando se verifique que $\mathbf{d} < \mathbf{c}_1$ el punto dado **P** será interior a $\mathbf{c}_1$ (ver ficha P. G. 2401), párrafo 3). Comparando el radio **r** con las distancias **d** y $\mathbf{c}_1$, tendremos los siguientes casos posibles:

4.31	$2r > c_1 + d$	Sin solución.
4.32	$2r = c_1 + d$	1 solución.
4.33	$c_1 - d < 2r < c_1 + d$	2 soluciones.
4.34	$2r = c_1 - d$	1 solución.
4.35	$2r < c_1 - d$	Sin solución.

4.4 Existe un caso muy excepcional de punto interior, cuando éste coincide con el centro $\mathbf{C}_1$ de la circunferencia dada, y se cumple además la condición de que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{2r}$. En este caso muy particular, la circunferencia trazada según 2.1 y la trazada según 2.2 con radio $\mathbf{c}_1 - \mathbf{r}$ son coincidentes, y el problema presenta **infinitas soluciones,** ya que dicha circunferencia tiene simultáneamente la propiedad enunciada en el l. g. n.° 2 de la ficha P. G. 2802 y la del l. g. n.° 10 de la ficha P. G. 2804.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla

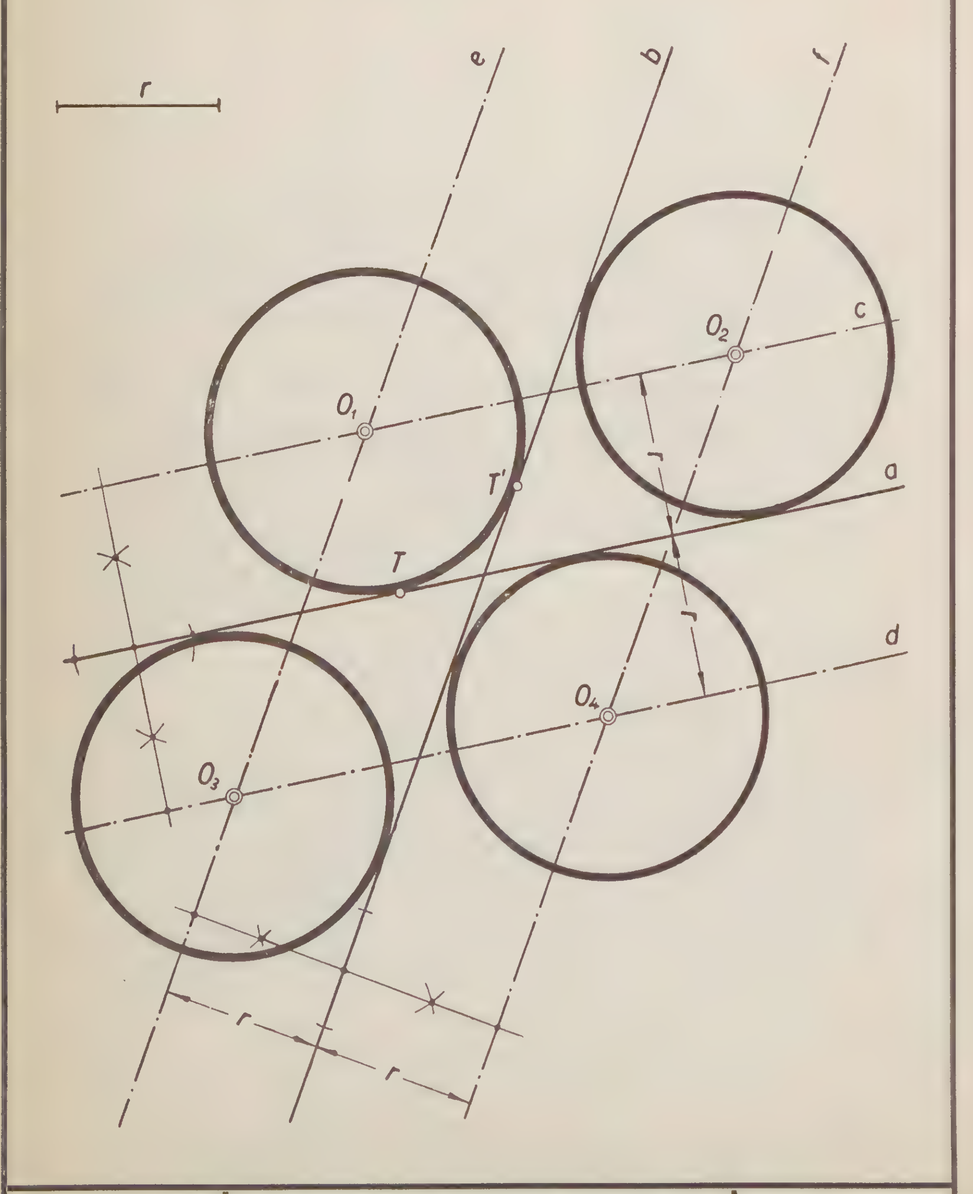
Enero 1966

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido
que sea tangente a dos rectas dadas
(r, R, R).

Ficha n.º 63	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2854

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos rectas dadas (r, R, R).*



Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla

Enero 1966

1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431, con el del problema n.° 4 del Grupo **A** (**r, R, R**), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **a** y **b** las rectas dadas y **r** el radio de la circunferencia pedida.

2.1 En ambos semiplanos de **a** y a la distancia **r,** trácense dos rectas **c** y **d** paralelas a **a** (ver fichas P. G. 2130 y P. G. 2121).

2.2 Igualmente, y en ambos semiplanos de **b,** trácense otras dos paralelas **e** y **f** a ella, a la distancia **r.**

2.3 Estas cuatro paralelas (**c**, **d**, **e** y **f**) podrán tener al menos un punto común **O** que será el centro de la circunferencia buscada. Los puntos de tangencia **T** y **T'** de ésta con las dos rectas dadas, estarán en los pies de las perpendiculares trazadas por **O** a **a** y **b** respectivamente.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo de **b,** para que la circunferencia pedida sea tangente a la recta **a,** su centro deberá hallarse en una de las paralelas **c** o **d** trazadas según 2.1, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.° 12 de la ficha P. G. 2804.

3.2 Igualmente, y prescindiendo de la recta **a,** para que la circunferencia pedida sea tangente a la recta **b**, su centro deberá hallarse en una de las paralelas **e** o **f** trazadas según 2.2, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el mencionado l. g. n.° 12 de la ficha P. G. 2804.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambas, dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

Las dos rectas **a** y **b** solo pueden tener entre sí dos posiciones relativas. O bien son secantes (tienen un punto común) o son paralelas (no tienen punto común).

Cuando las rectas son secantes, formarán entre sí cuatro ángulos iguales dos a dos (ver ficha P. G. 2110) y las paralelas a los lados trazadas en el interior de uno de dichos ángulos se cortarán en el interior del mismo, por lo que tendremos siempre cuatro puntos de intersección (uno en cada uno de los cuatro ángulos). Por consiguiente el problema planteado, cuando las rectas sean secantes, siempre tendrá *cuatro soluciones*.

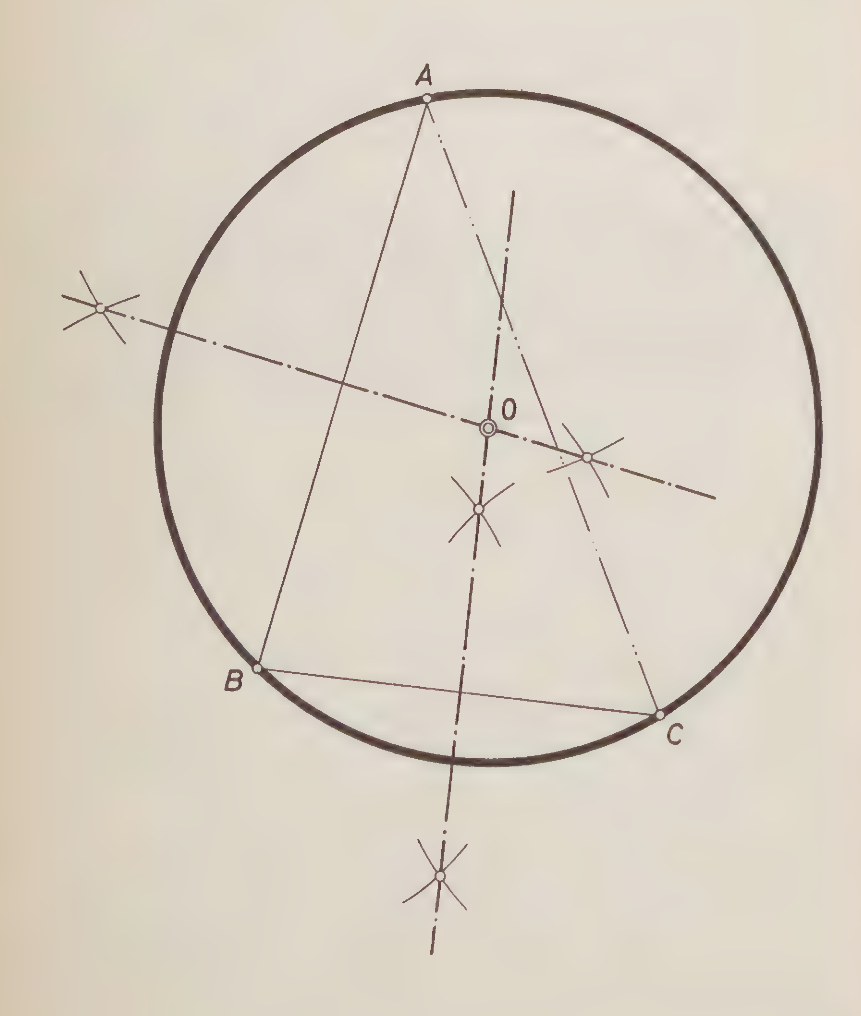
Cuando las rectas dadas **a** y **b** sean paralelas, el problema en general *no tiene solución*, ya que las rectas **c, d, e** y **f** serán todas paralelas entre sí. Excepcionalmente, cuando la separación entre las dos paralelas **a** y **b** sea de **2r,** habrá coincidencia de dos de las paralelas trazadas según 2.1 y 2.2 en la zona comprendida entre las rectas dadas, y entonces el problema tiene *infinitas soluciones*, puesto que las paralelas coincidentes se transforman en la *paralela media* de las dos dadas, que tiene la propiedad enunciada en el l. g. n.º 8 de la ficha P. G. 2803.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados (P, P, P).

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados (P, P, P).*



1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema n.º 7 del Grupo B (P, P, P), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **A, B** y **C** los puntos dados (no alineados).

2.1 Trácese la mediatriz del segmento **AB** según el trazado dado en la ficha P. G. 2131 (obsérvese que para ello no es necesario unir **A** con **B**).

2.2 Trácese igualmente la mediatriz del segmento **BC.**

2.3 Estas dos mediatrices se cortarán en un punto único **O** que será el centro de la circunferencia pedida.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo del punto **C,** para que la circunferencia pedida pase por los puntos **A** y **B,** su centro deberá hallarse en la mediatriz del segmento **AB,** ya que ésta tiene la propiedad enunciada en el l. g. n.º 4 de la ficha P. G. 2802.

3.2 Igualmente, y prescindiendo del punto **A,** para que la circunferencia pedida pase por los puntos **B** y **C,** su centro deberá hallarse en la mediatriz del segmento **BC,** por las mismas razones anteriores.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambas mediatrices, dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

Considerando unidos los tres puntos dados **A, B** y **C,** se nos forma el triángulo **ABC.** Según hemos visto en la ficha P. G. 2202 párrafo 2, en todo triángulo, las mediatrices de sus tres lados se cortan en un punto único llamado *circuncentro* (centro de la circunferencia circunscrita).

Esto nos indica que el problema considerado siempre tiene **una solución,** excepto cuando los tres puntos estén alineados, en que **no tiene ninguna;** en este caso particular desaparece la forma triangular **ABC,** siendo las mediatrices de las segmentos **AB** y **BC** rectas paralelas.

Por otra parte, como las tres mediatrices de los tres lados del triángulo **ABC** son concurrentes en su circuncentro, este trazado puede obtenerse tomando indistintamente dos cualesquiera de los lados de dicho triángulo (**a** y **b**; **b** y **c**; **c** y **a**).

5. Aplicaciones.

Este trazado sirve también para resolver el problema de «Obtener el centro y la magnitud del radio de una circunferencia o arco representado gráficamente». Para resolverlo se toman tres puntos cualesquiera de dicha circunferencia (lo más alejados posible) y se efectúa el trazado explicado en el párrafo 2; esto nos permite determinar la posición del centro y medir la longitud de su radio.

Este caso se presenta con mucha frecuencia al croquizar piezas o modelos corpóreos cuyos contornos son arcos de circunferencia tangentes a rectas u otras circunferencias; muchas veces estos contornos suelen ser planos lo que permite reproducirlos sobre una hoja de papel simplemente apoyando la pieza sobre ella, con lo cual podemos acotar con la mayor exactitud los radios del arco o arcos correspondientes.

También tiene aplicación este trazado, empleado reiteradamente, en la obtención de los centros sucesivos de arcos de circunferencias tangentes entre sí, que pasen por puntos consecutivos tomados sobre una curva cualquiera de generación libre (no geométrica). El dibujo a lápiz y entintado posterior puede hacerse entonces con el compás, siendo más exacto su trazado cuanto más cerca tomemos los puntos entre sí.

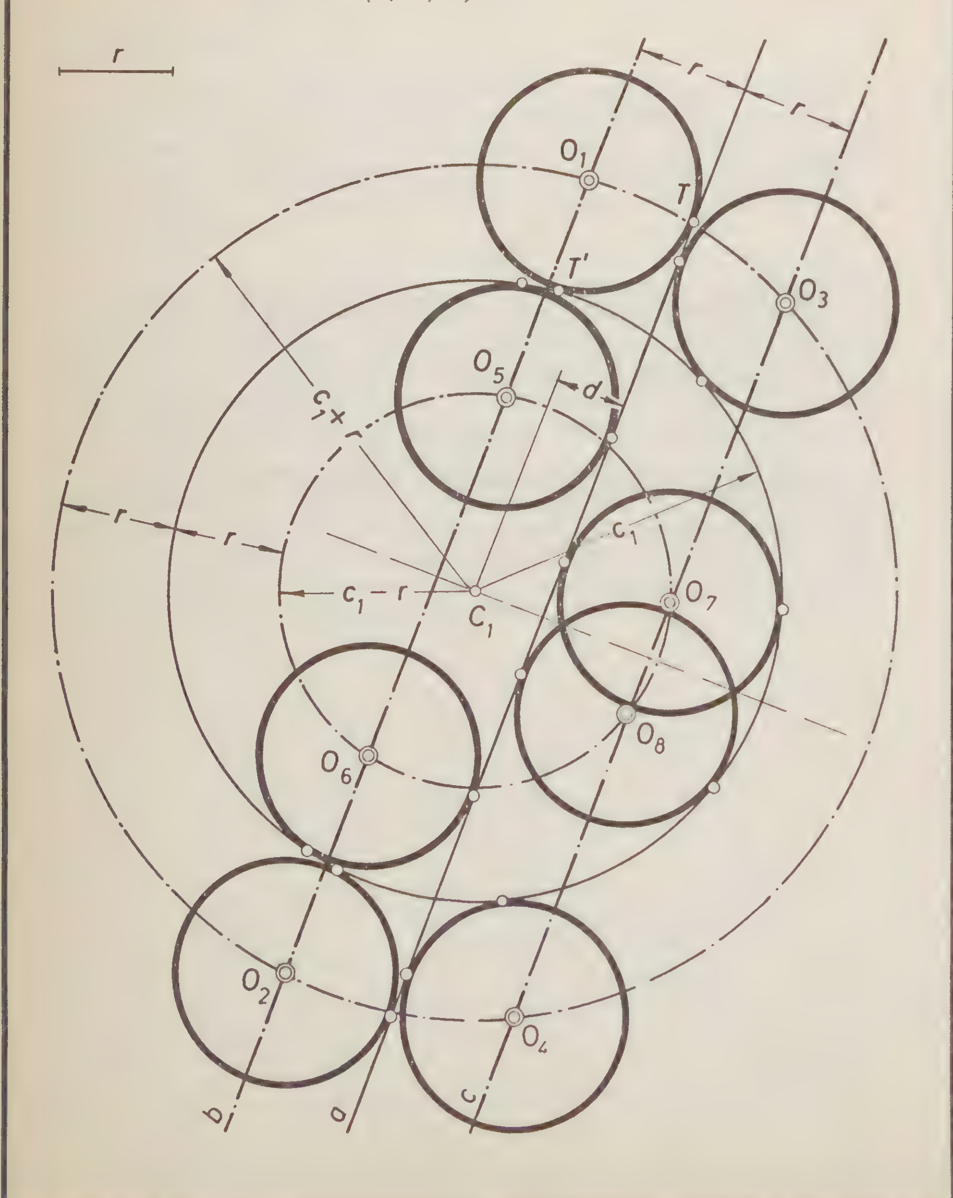
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a una recta y circunferencia dadas (r, R, C).

Ficha n.º 65	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2855

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a una recta y circunferencia dadas (r, R, C).*



Reproducción prohibida	Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla	Enero 1966

1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema 5.° del Grupo A (r, R, C), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **a** la recta dada, c_1 el radio de la circunferencia conocida y **r** el radio de la pedida.

2.1 En ambos semiplanos de **a** y a la distancia **r**, trácense dos rectas **b** y **c** paralelas a **a** (ver fichas P. G. 2130 y P. G. 2121).

22. Con centro en C_1 y radios $c_1 + r$, $c_1 - r$ trácense otras dos circunferencias concéntricas con la dada.

2.3 Las dos paralelas trazadas según 2.1 y las dos circunferencias trazadas según 2.2 podrán tener al menos un punto común **O** que será el centro de la circunferencia buscada. El punto de tangencia **T** de ésta con la recta dada estará en el pie de la perpendicular trazada desde **O** a **a**; el de tangencia **T'** con la circunferencia dada, estará en la línea de los centros OC_1.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo de la circunferencia C_1, para que la circunferencia pedida sea tangente a la recta **a**, su centro deberá hallarse en una de las paralelas trazadas según 2.1, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.° 12 de la ficha P. G. 2804.

3.2 Prescindiendo ahora de la recta **a**, para que la circunferencia pedida sea tangente a la circunferencia c_1, su centro deberá hallarse en una de las circunferencias trazadas según 2.2, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.° 10 de la ficha P. G. 2804.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambos l. g., dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

La solución de este problema depende fundamentalmente de las magnitudes relativas entre la distancia **d** de la recta **a** al centro C_1 de la circunferencia conocida, y de los radios c_1 y **r** también dados.

El problema planteado tendrá solución si existen puntos comunes entre las rectas trazadas según 2.1 y las circunferencias trazadas según 2.2, lo cual ocurrirá cuando sean tangentes (un punto común) o secantes (dos puntos comunes). Como son dos rectas y dos circunferencias auxiliares las

que nos definen los centros de las buscadas, al comparar cada una de las dos primeras con cada una de las dos segundas, cada recta y circunferencia comparada tendrán como máximo dos puntos comunes (recta secante), y por consiguiente podrá haber hasta **ocho soluciones** distintas (2×4), como son las que existen en el ejemplo propuesto en esta ficha.

Este número máximo de soluciones puede disminuir progresivamente de **ocho** a **cero** soluciones, pudiendose presentarse los casos que a continuación detallamos, correspondientes a las posiciones relativas de la recta y circunferencia dadas (ver ficha P. G. 2401, párrafo 4). Para todos ellos es válido el trazado dado en el párrafo 2.

4.1 Recta exterior a la circunferencia dada ($d > c_1$).

4.11	$2r > d + c_1$	4 soluciones.
4.12	$2r = d + c_1$	3 soluciones.
4.13	$d + c_1 > 2r > d - c_1$	2 soluciones.
4.14	$2r = d - c_1$	1 solución.
4.15	$2r < d - c_1$	Sin solución.

4.2 Recta tangente a la circunferencia dada ($d = c_1$).

4.21	$r \gtrless c_1$	4 soluciones.
4.22	$r = c_1$	3 soluciones.

4.3 Recta secante a la circunferencia dada ($d < c_1$).

4.31	$2r > c_1 + d$	4 soluciones.
4.32	$2r = c_1 + d$	5 soluciones.
4.33	$d + c_1 > 2r > c_1 - d$	6 soluciones.
4.34	$2r = c_1 - d$	7 soluciones.
4.35	$0 < 2r < c_1 - d$	8 soluciones.

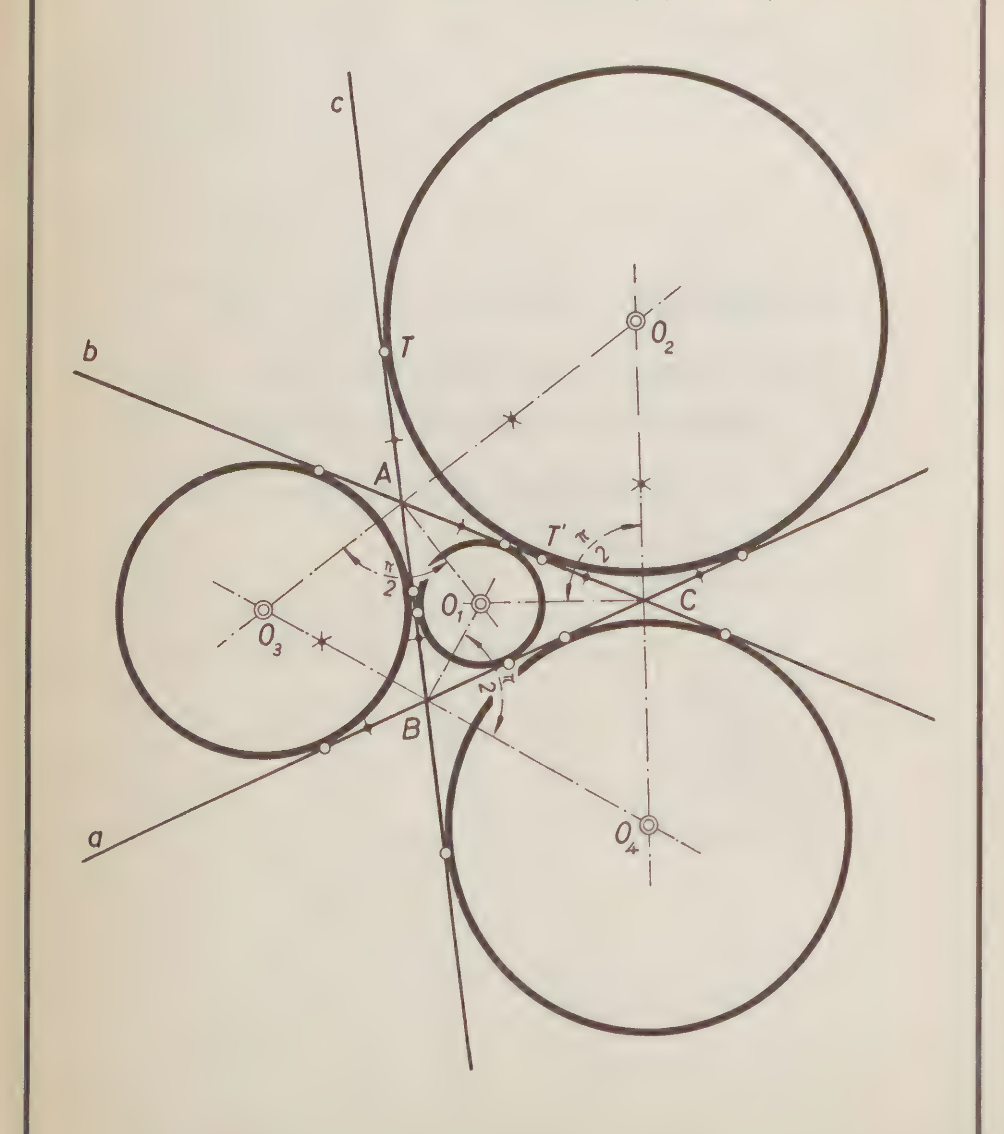
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia que sea tangente a tres rectas dadas (R, R, R).

Ficha n.º 66	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2867

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia que sea tangente a tres rectas dadas (R, R, R).*



1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema 8.º del Grupo B (R, R, R), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean **a, b** y **c** las tres rectas dadas, que para mayor generalidad suponemos secantes dos a dos. Dichas rectas, al cortarse mutuamente, nos determinarán el triángulo de vértices **A**, **B** y **C**.

2.1 Trácense las *bisectrices interiores* de dicho triángulo (ver fichas P. G. 2203 y P. G. 2114), que se cortarán en el *incentro* O_1 del mismo. Para ello es suficiente con trazar dos cualesquiera de dichas bisectrices.

2.2 Igualmente trácense las *bisectrices exteriores* del mencionado triángulo **ABC** (ver fichas P. G. 2203 y P. G. 2114), que se cortarán en los *exincentros* O_2, O_3 y O_4 del mismo. Estas bisectrices serán *perpendiculares* a las anteriores.

2.3 Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son centros de circunferencias que cumplen las condiciones del enunciado, por lo que el problema planteado puede tener hasta **cuatro soluciones** distintas. Los puntos de tangencia **T** y **T'** de éstas con las rectas dadas, estarán en los pies de las perpendiculares trazadas por los centros anteriores a los lados respectivos.

3. Demostración.

3.1 Prescindiendo de una de las rectas dadas, la **c** p. e., para que la circunferencia pedida sea tangente a las otras dos **a** y **b**, su centro deberá hallarse en la bisectriz v_c del ángulo formado por ellas (ángulo **C**), ya que dicha bisectriz tiene la propiedad enunciada en el l. g. n.º 6 de la ficha P. G. 2803.

3.2 Igualmente, y prescindiendo de la recta **b**, para que la circunferencia pedida sea tangente a las rectas **a** y **c**, su centro deberá hallarse en la bisectriz v_b del ángulo formado por ellas (ángulo **B**), por la misma razón anterior.

3.3 Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambas, dicho centro buscado será su punto de intersección.

4. Discusión.

Las posiciones relativas que pueden ocupar tres rectas en el plano, son las siguientes:

1.º Las tres, mutuamente secantes dos a dos (caso general).

2.º Dos paralelas y la tercera secante a ambas.

3.º Las tres paralelas.

4.º Las tres concurrentes en un punto.

4.1 Cuando las tres rectas sean secantes dos a dos, ya hemos visto que el problema tiene siempre **cuatro soluciones** distintas, cuya obtención hemos establecido en el párrafo 2 (caso general).

4.2 El caso segundo, de dos rectas **a** y **b** paralelas y la tercera **c** secante a las anteriores, puede considerarse como caso límite del primero, cuando el vértice **C** se se aleje hacia el infinito. La resolución dada en el párrafo 2. sigue siendo válida para este caso límite, perdiéndose las soluciones $\mathbf{O_3}$ y $\mathbf{O_4}$, por lo que el problema sólo tiene **dos soluciones.** La transformación que sufre el trazado general en este caso límite, está expresada en la fig. 1.

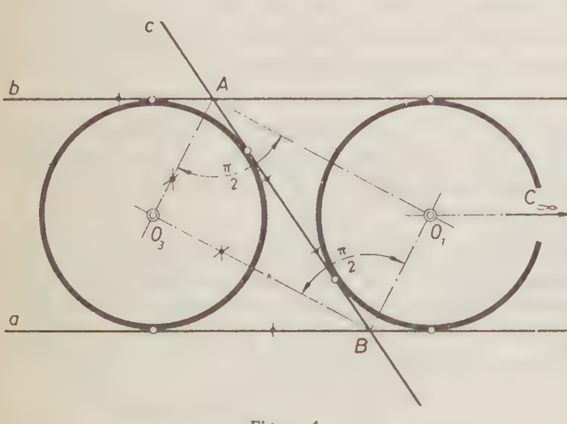


Figura 1

4.3 Si las tres rectas son paralelas, el problema planteado **no tiene solución.**

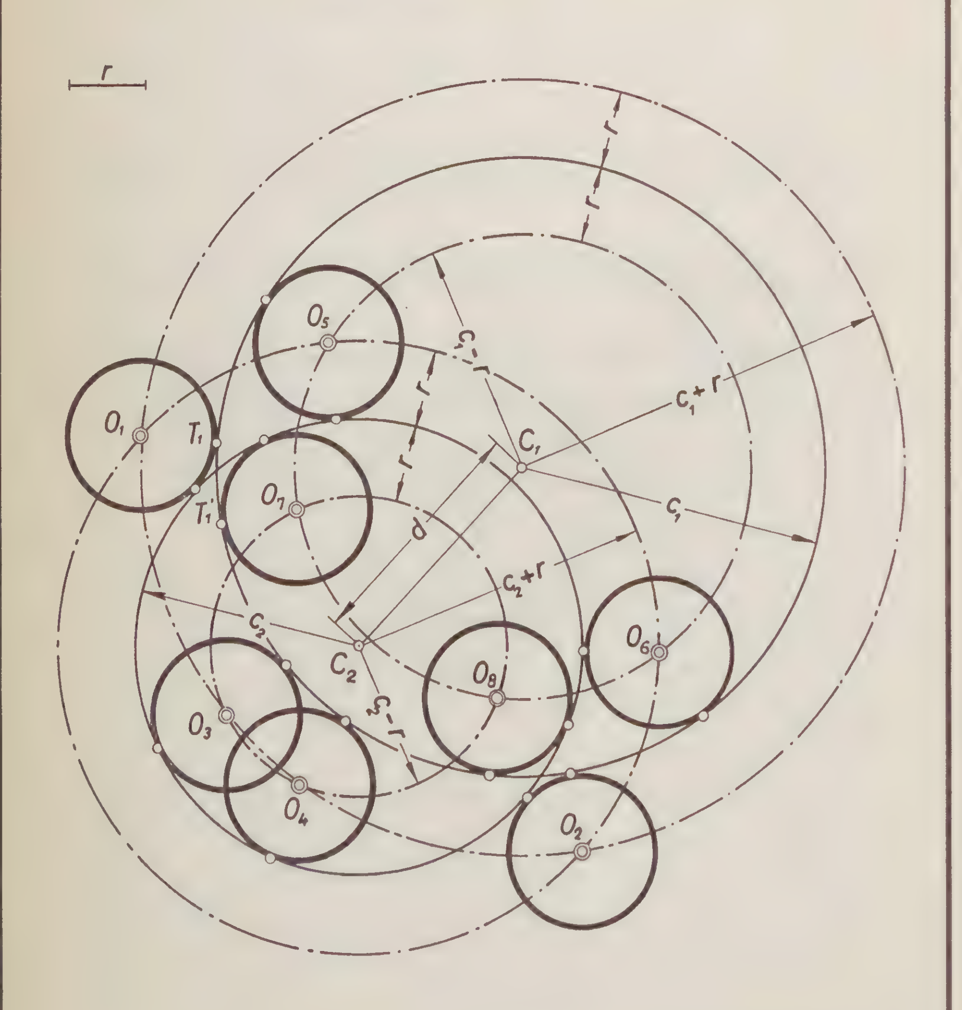
4.4 Si las tres rectas dadas son concurrentes, el problema **tampoco tiene solución.**

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C).

Ficha n.º 67	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2856

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C).*



 | Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla | Enero 1966

1. Generalidades.

Continuamos el estudio de los problemas de tangencia planteados en la ficha P. G. 2431 con el del problema 6.º del Grupo A (r, C, C), cuyo enunciado explícito es el correspondiente a esta ficha. El método seguido en su resolución es el de intersección de lugares geométricos, estudiado de forma general en la ficha P. G. 2801.

2. Resolución.

Sean c_1 y c_2 los radios de las dos circunferencias dadas y **r** el de la buscada.

2.1. Con centro en C_1 y radios $c_1 + r$, $c_1 - r$ trácense dos circunferencias que serán concéntricas con una de las dadas.

2.2. Con centro en C_2 y radios $c_2 + r$, $c_2 - r$ trácense otras dos circunferencias que serán concéntricas con la otra dada.

2.3. Estas cuatro circunferencias podrán tener al menos un punto común **O** que será el centro de la circunferencia buscada. Los puntos de tangencia **T** y **T'** de ésta con las dadas de radios c_1 y c_2, estarán en la línea de los centros OC_1 y OC_2 .

3. Demostración.

3.1. Prescindiendo de la circunferencia C_2, para que la circunferencia pedida sea tangente a la C_1 , su centro deberá hallarse en una de las dos circunferencias trazadas según **2.1**, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.º 10 de la ficha P. G. 2803.

3.2. Igualmente, y prescindiendo de la circunferencia C_1 , para que la circunferencia pedida sea tangente a la C_2, su centro deberá hallarse en una de las dos circunferencias trazadas según 2.2, ya que ellas tienen la propiedad enunciada en el l. g. n.º 10 de la ficha P. G. 2803.

3.3. Por consiguiente, al tener que estar simultáneamente en ambas, dicho centro buscado **O** será su punto de intersección.

4. Discusión.

La solución de este problema depende fundamentalmente de las magnitudes relativas de los radios $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ y **r**, así como de la distancia **d** entre los centros $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$.

El problema planteado tendrá solución si existen puntos comunes entre las circunferencias trazadas según 2.1 y 2.2, lo cual ocurrirá cuando sean tangentes (un punto común) o secantes (dos puntos comunes). Como son cuatro las circunferencias auxiliares que nos definen los centros de las buscadas, al comparar cada una de las dos primeras con cada una de las segundas, podrán éstas tener como máximo dos puntos comunes (circunferencias secantes) y por consiguiente podrá haber en total hasta ocho soluciones distintas ($2 \wedge 4$), como son las que existen en el ejemplo propuesto en esta ficha. *

Este número máximo puede disminuir progresivamente de **ocho** a **una** solución, e incluso no existir ninguna si las cuatro circunferencias auxiliares no llegan a tener ningún punto común.

Un estudio detallado de las posibles soluciones de este problema, cuando sean conocidas gráfica o numéricamente las magnitudes de los radios $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, **r**, y la distancia **d** entre los centros de las dos circunferencias dadas, está desarrollado en la ficha P. G. 2856, hoja 2.

---

* Para una relación muy excepcional de los datos, este problema puede tener infinitas soluciones; este caso lo estudiamos en la mencionada ficha P. G. 2856, hoja 2.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C).*

Continuamos en esta ficha el estudio de este problema, ya resuelto en la P. G. 2856.

5. Posibles soluciones.

Vamos a determinar las posibles soluciones del mismo cuando sean conocidas gráfica o numéricamente las magnitudes de los radios $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ y $\mathbf{r}$ de las dos circunferencias dadas y pedida, así como la distancia **d** entre los centros de la primera.

Como ya hemos visto, la solución de este problema se obtiene fácilmente trazando en cada una de las circunferencias conocidas, dos auxiliares concéntricas con ellas de radios suma o diferencia de la conocida y la pedida, y hallando los puntos comunes de estas cuatro circunferencias auxiliares, que serán los centros de las buscadas.

Para fijar ideas, supongamos (fig. 1) las dos circunferencias dadas de radios $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$, y centros $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$ respectivamente, cuya distancia entre centros es **d**.

Con centro en $\mathbf{C_1}$ tracemos las circunferencias de radio $\mathbf{a_1} = \mathbf{c_1} + \mathbf{r}$ y la de radio $\mathbf{b_1} = \mathbf{c_1} - \mathbf{r}$. Igualmente, y con centro en $\mathbf{C_2}$, tracemos las circunferencias de radio $\mathbf{a_2} = \mathbf{c_2} + \mathbf{r}$ y la de radio $\mathbf{b_2} = \mathbf{c_2} - \mathbf{r}$.

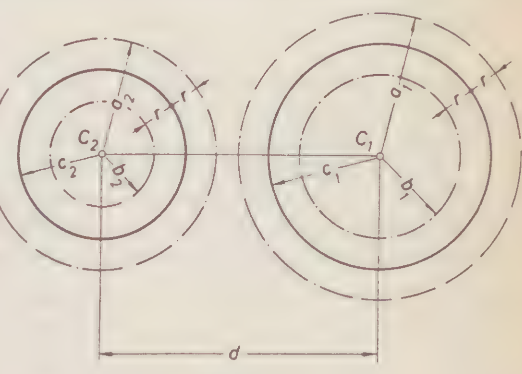


Figura 1

Para que el problema considerado tenga solución es preciso que haya al menos un punto común entre las circunferencias de radio $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$. En el estudio de las posibles soluciones vamos a comparar sucesivamente cada una de estas circunferencias auxiliares con las dos de la circunferencia opuesta, ya que las de la misma circunferencia ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$ o $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$ son concéntricas y por lo tanto no pueden tener puntos comunes.

En estas condiciones sólo son posibles los cuatro casos siguientes:

1.º a_1 y a_2
2.º a_1 y b_2
3.º b_1 y a_2
4.º b_1 y b_2

Obsérvese que los valores de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son *sumas* de segmentos, y los de $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son *diferencias.*

En el estudio detallado de cada uno de estos casos, que hacemos a continuación, el problema tendrá **una solución** si las circunferencias

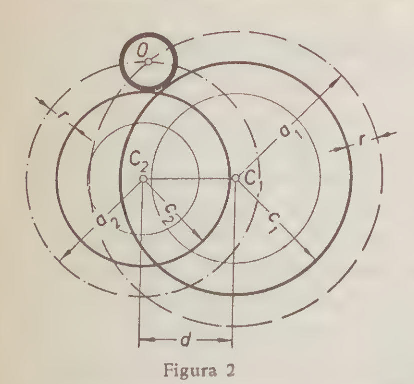


Figura 2

Figura 3

auxiliares consideradas son *tangentes exteriores* o *interiores*, y **dos soluciones** si son *secantes;* en las restantes posiciones posibles el problema **no tiene solución.**

5.1 Caso 1.º-Posiciones relativas de las circunferencias de radio $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Si estas dos circunferencias tienen al menos un punto común **O,** éste será el centro de una posible solución, y la circunferencia pedida será **tangente exteriormente** a la $\mathbf{c}_1$ (por ser $a_1 = c_1 + r$) y **tangente exteriormente** a la $\mathbf{c}_2$ (por ser $a_2 = c_2 + r$) (fig. 2).

En el párrafo 5, de la ficha P. G. 2401, hemos estudiado las posiciones relativas de dos circunferencias en función de sus radios respectivos y de su distancia entre centros. Aplicándolas al caso que estudiamos, tendremos las posibles posiciones y soluciones siguientes:

5.11	$d > a_1 + a_2$	Exteriores	Sin solución
5.12	$d = a_1 + a_2$	Tangentes exteriores	1 solución
5.13	$a_1 + a_2 > d > a_1 - a_2$	Secantes	2 soluciones
5.14	$d = a_1 - a_2$	Tangentes interiores	1 solución
5.15	$a_1 - a_2 > d \geqq 0$	Interiores	Sin solución

5.2 Caso 2.º-Posiciones relativas de las circunferencias de radio $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_2$.

Si estas dos circunferencias tienen al menos un punto común **O,** éste será el centro de una posible solución, y la circunferencia pedida será **tangente exteriormente** a la $\mathbf{c}_1$ (por ser $a_1 = c_1 + r$), y **tangente interiormente** a la $\mathbf{c}_2$ (por ser $b_2 = c_2 - r$) (fig. 3).

Siguiendo las directrices marcadas en el párrafo 5.1, tendremos:

5.21	$d > a_1 + b_2$	Exteriores	Sin solución
5.22	$d = a_1 + b_2$	Tangentes exteriores	1 solución
5.23	$a_1 + b_2 > d > a_1 - b_2$	Secantes	2 soluciones
5.24	$d = a_1 - b_2$	Tangentes interiores	1 solución
5.25	$a_1 - b_2 > d \geqq 0$	Interiores	Sin solución

5.3 Caso 3.°-Posiciones relativas de las circunferencias de radio b_1 y a_2.

Si estas dos circunferencias tienen al menos un punto común **0,** ésta será el centro de una posible solución, y la circunferencia pedida será **tangente interiormente** a la c_1 (por ser $b_1 = c_1 - r$), y **tangente exteriormente** a la c_2 (por ser $a_2 = c_2 + r$) (fig. 4).

Siguiendo las directrices marcadas en el párrafo 5.1, tendremos:

5.31	$d > b_1 + a_2$	Exteriores	Sin solución
5.32	$d = b_1 + a_2$	Tangentes exteriores	1 solución
5.33	$b_1 + a_2 > d > b_1 - a_2$	Secantes	2 soluciones
5.34	$d = b_1 - a_2$	Tangentes interiores	1 solución
5.35	$b_1 - a_2 > d \geqq 0$	Interiores	Sin solución

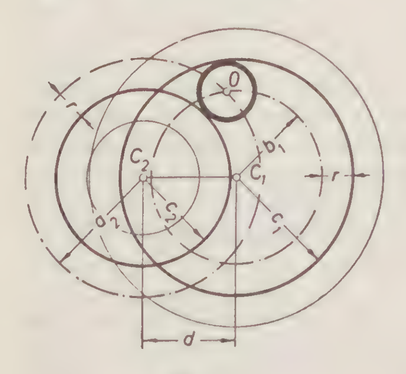


Figura 4

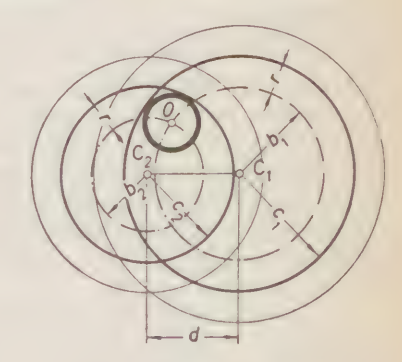


Figura 5

5.4 Caso 4.°-Posiciones relativas de las circunferencias de radio b_1 y b_2.

Si estas dos circunferencias tienen al menos un punto común **0,** éste será el centro de una posible solución, y la circunferencia pedida será **tangente interiormente** a la c_1 (por ser $b_1 = c_1 - r$), y **tangente interiormente** a la c_2 (por ser $b_2 = c_2 - r$) (fig. 5).

Siguiendo las directrices marcadas en el párrafo 5.1, tendremos:

5.41	$d > b_1 + b_2$	Exteriores	Sin solución
5.42	$d = b_1 + b_2$	Tangentes exteriores	1 solución
5.43	$b_1 + b_2 > d > b_1 - b_2$	Secantes	2 soluciones
5.44	$d = b_1 - b_2$	Tangentes interiores	1 solución
5.45	$b_1 - b_2 > d \geqq 0$	Interiores	Sin solución

5.5 Existen dos casos muy singulares en que el número de soluciones de este problema es **infinito.** Esto ocurre cuando las dos circunferencias dadas c_1 y c_2 son concéntricas ($d = 0$) y al mismo tiempo sus radios cumplen las condiciones de ser $\mathbf{c_1 - c_2 = 2r}$, o $\mathbf{c_1 + c_2 = 2r}$. En estas circunstancias tan particulares, las circunferencias auxiliares $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{a_2}$ son coincidentes, o igualmente las $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{b_2}$, siendo por lo tanto l. g. de los puntos equidistantes de las dos dadas (ver l. g. n.º 10 de la ficha P. G. 2804).

Establecidas en los párrafos 5.1 a 5.5 todas las relaciones posibles que pueden existir entre los datos $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$, **r** y **d**, es fácil determinar previamente con ellas las soluciones que tenga este problema para valores determinados de los mismos, bien sean éstos expresados gráficamente o mejor, por ser más faciles de comparar, numéricamente.

Como en las expresiones anteriores se comparan segmentos entre sí, algunos de los cuales están expresados como **suma** de otros dos, y otros como **diferencia,** puede suceder en este último caso que algunas de estas diferencias sean nulas (segmento minuendo *igual* al sustraendo) o negativas (segmento minuendo *menor* al sustraendo).

Geométricamente los valores negativos no tienen sentido en estos problemas de posición, ya que al expresar la diferencia de dos segmentos *no orientados*, sólo interesa conocer el valor absoluto del segmento diferencia, el cual siempre puede obtenerse restando el *menor* del *mayor* (ver ficha P. G. 2010, párrafo 3). Así pues, cuando en las relaciones anteriores surjan valores negativos en las diferencias, puede cambiarse el signo del resultado, o invertir el orden del minuendo y sustraendo.

En la ficha P. G. 2856 hoja 3, continuamos el estudio de este problema con el análisis y aplicación de los conceptos anteriores a algunos casos particulares, haciendo el estudio de sus posibles soluciones, así como su representación gráfica.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

 |

ENUNCIADO: *Trazar una circunferencia de radio conocido que sea tangente a dos circunferencias dadas (r, C, C).*

Continuamos en esta ficha el estudio de este problema ya resuelto en la P. G. 2856.

En la hoja n.º 2 de esta misma ficha se han establecido las posibles soluciones de este problema en función de los radios $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ de las dos circunferencias dadas, del radio **r** de la pedida y de la distancia **d** entre los centros de aquéllas.

En esta ficha vamos a hacer el análisis de algunos casos concretos como aplicación de los conceptos estudiados y que a continuación exponemos:

6. Análisis de casos particulares.

El análisis de cualquier caso particular de este problema, que nos permita conocer previamente el número de soluciones posibles en función de los datos, lo haremos ordenadamente de la siguiente forma:

6.1 Fijar numéricamente las magnitudes de los segmentos $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, **d** y **r**, por medición directa de ellos, si nos son conocidos gráficamente (esta medición puede hacerse en cualquier unidad de longitud, usándose normalmente el milímetro).

6.2 Obtener los valores de las siguientes relaciones previas establecidas en el párrafo 5:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{r}; \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{r}; \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_2 + \mathbf{r}; \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_2 - \mathbf{r}$$

6.3 Obtener las posibles soluciones en que la circunferencia pedida sea *tangente exteriormente* a las dos dadas. Para ello determinaremos previamente la suma y diferencia de los valores de los segmentos $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, a fin de poder compararlos con la distancia **d.** Esta comparación se hará consultando las relaciones 5.11 a 5.15 de la hoja 2 de esta ficha.

6.4 Obtener las posibles soluciones en que la circunferencia pedida sea *tangente exteriormente* a la de radio $\mathbf{c}_1$ y *tangente interiormente* a la de radio $\mathbf{c}_2$. Para ello determinaremos previamente la suma y diferencia de los valores de los segmentos $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_2$, a fin de poder compararlos con la distancia **d.** Esta comparación se hará consultando las relaciones 5.21 a 5.25 de la hoja 2 de esta ficha.

6.5 Obtener las posibles soluciones en que la circunferencia pedida sea *tangente interiormente* a la de radio $\mathbf{c}_1$ y *tangente exteriormente* a la de radio $\mathbf{c}_2$. Para ello determinaremos previamente la suma y diferencia de los valores de los segmentos $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{a}_2$, a fin de poder compararlos con la distancia **d.** Esta comparación se hará consultando las relaciones 5.31 a 5.35 de la hoja 2 de esta ficha.

6.6 Obtener las posibles soluciones en que la circunferencia pedida sea *tangente interiormente* a las dos dadas. Para ello determinaremos previamente la suma y diferencia de los valores de los segmentos $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, a fin de poder



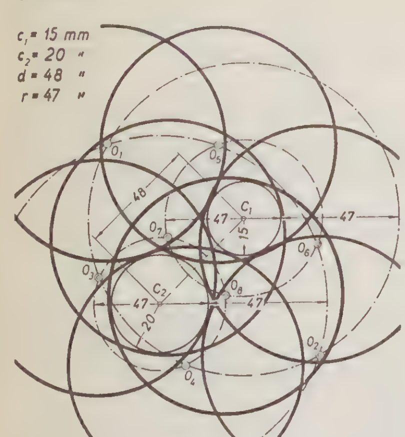


Figura 1

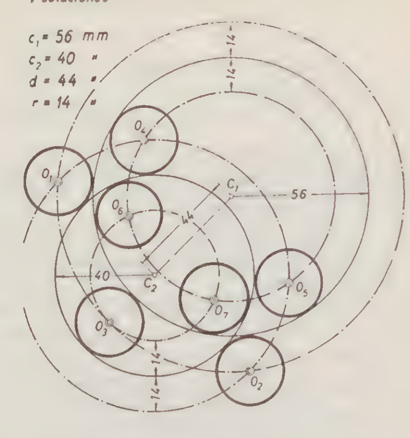


Figura 2

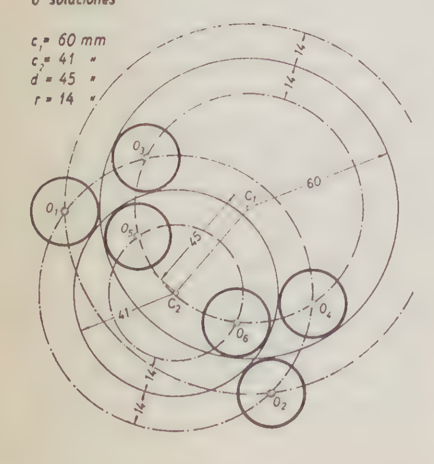


Figura 3

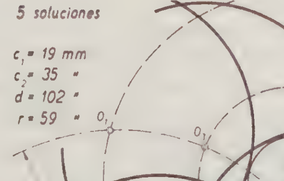




Figura 4

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla

Enero 1966

4 soluciones

$c_1 = 53$ mm
$c_2 = 40$ "
$d = 61$ "
$r = 30$ "

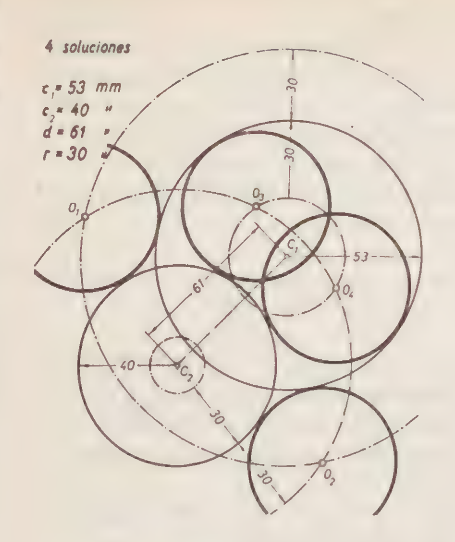


Figura 5

3 soluciones

$c_1 = 24$ mm
$c_2 = 43$ "
$d = 89$ "
$r = 35$ "

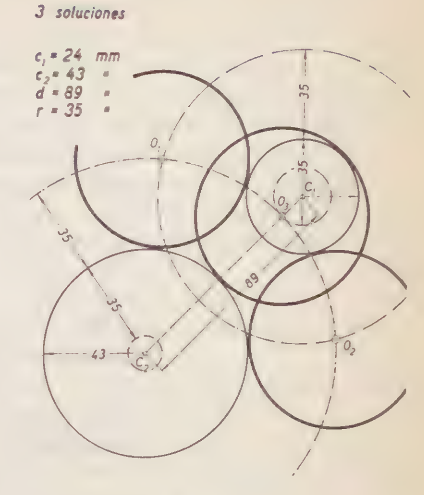


Figura 6

2 soluciones

$c_1 = 32$ mm
$c_2 = 40$ "
$d = 76$ "
$r = 22$ "

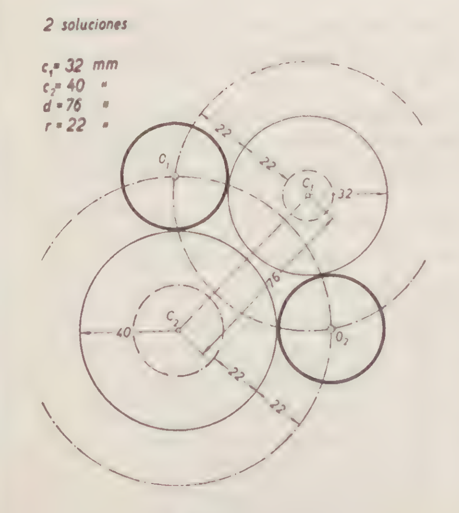


Figura 7

1 solución

$c_1 = 26$ mm
$c_2 = 34$ "
$d = 96$ "
$r = 18$ "

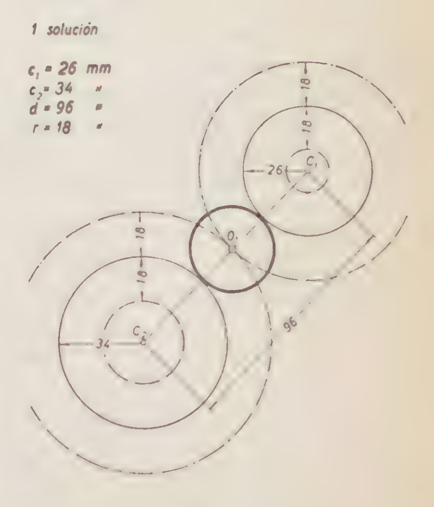


Figura 8

compararlos con la distancia **d**. Esta comparación se hará consultando las relaciones 5.41 a 5.45 de la hoja 2 de esta ficha.

6.7 Si el caso estudiado tuviese el valor $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, según las relaciones 5.15' 5.25, 5.35 y 5.45 el problema no tendría solución. No obstante, antes de llegar a esta conclusión, deberá comprobarse si $\mathbf{c_1} + \mathbf{c_2} = \mathbf{2r}$ o si $\mathbf{c_1} - \mathbf{c_2} = \mathbf{2r}$, pues caso de que esto se verifique, entonces el problema tendría *infinitas soluciones* según hemos visto en el párrafo 5.5 de la hoja 2 de esta ficha.

Como aplicación de los conceptos anteriores, hacemos a continuación el estudio de los siguientes ejemplos numéricos:

7. Ejemplos numéricos.

7.1 Datos: $\mathbf{c_1 = 20}$ **mm**; $\mathbf{c_2 = 15}$ **mm**; $\mathbf{d = 48}$ **mm**; $\mathbf{r = 47}$ **mm**

7.2 $a_1 = 20 + 47 = 67$ $b_1 = 20 - 47 = 27^*$
$a_2 = 15 + 47 = 62$ $b_2 = 15 - 47 = 32^*$

7.3 $a_1 + a_2 = 67 + 62 = 129$ $a_1 - a_2 = 67 - 62 = 5$ $129 > 48 > 5$
2 soluciones *tangentes exteriormente* a las c_1 y c_2

7.4 $a_1 + b_2 = 67 + 32 = 99$ $a_1 - b_2 = 67 - 32 = 35$ $99 > 48 > 35$
2 soluciones *tangentes exteriormente* a la c_1 y *tangentes interiormente* a la c_2

7.5 $b_1 + a_2 = 27 + 62 = 89$ $b_1 - a_2 = 27 - 62 = 35^*$ $89 > 48 > 35$
2 soluciones *tangentes interiormente* a la c_1 y *tangentes exteriormente* a la c_2

7.6 $b_1 + b_2 = 27 + 32 = 59$ $b_1 - b_2 = 27 - 32 = 5^*$ $59 > 48 > 5$
2 soluciones *tangentes interiormente* a las c_1 y c_2

7.7 Siendo $d > 0$ no hay necesidad de comprobar si concurren las circunstancias dadas en el párrafo 6.7.

El número total de soluciones para el caso particular considerado será por consiguiente de $2 + 2 + 2 + 2 = 8$. Su representación gráfica está realizada a escala en la figura n.º 1.

Siguiendo las directrices marcadas anteriormente, puede estudiar el lector los ejemplos siguientes, escogidos para obtener soluciones desde 8 hasta 1, cuyos resultados damos directamente sin deducir y representados a escala en las figuras 1 a 8.

Ejemplo	DATOS				RESULTADOS
	c_1	c_2	d	r	
1.º	15	20	48	47	8 soluciones (fig. 1)
2.º	56	40	44	14	7 soluciones (fig. 2)
3.º	60	41	45	14	6 soluciones (fig. 3)
4.º	19	35	102	59	5 soluciones (fig. 4)
5.º	53	40	61	30	4 soluciones (fig. 5)
6.º	24	43	89	35	3 soluciones (fig. 6)
7.º	32	40	76	22	2 soluciones (fig. 7)
8.º	26	34	96	18	1 solución (fig. 8)

* Consúltese para los valores negativos, lo establecido en la hoja 2, párrafo 5.5 de esta ficha.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

LÍNEAS CURVAS

1. Generalidades.

Al igual que los conceptos de *punto y recta geométricos* no pueden definirse mediante otros más sencillos, según vimos en la ficha P. G. 2010, ocurre lo mismo con el concepto de *plano geométrico*, del cual no puede darse una definición directa sin basarse en sus propiedades.

Recurriendo a conceptos intuitivos podemos imaginarnos el plano geométrico por la forma que tiene la superficie tersa del agua contenida en un estanque de pequeñas dimensiones; por un espejo que no deforme las imágenes; por una mesa sobre cuya tapa se puede adaptar una regla en cualquier posición, etc. Estas imágenes pueden servirnos de base para, por abstracción de sus propiedades físicas, llegar al concepto de **plano geométrico.** El plano geométrico se considera ilimitado en todos sus sentidos (largo y ancho), aun cuando en sus representaciones gráficas haya de limitarse por contornos convencionales que nos den idea de su posición.

Un plano cualquiera queda definido cuando se conoce la posición de tres puntos cualesquiera de él, y que no estén alineados. También lo definen una recta y un punto no contenido en ella; dos rectas secantes y dos rectas paralelas.

2. Líneas curvas en general.-Definiciones.

Basándonos en el concepto de recta (ver ficha P. G. 2010, párrafo 1), y por comparación con ella, podemos definir geométricamente una curva en general como **toda línea que no es recta ni en su totalidad ni en cualquiera de sus partes.** Esto quiere decir que si tratásemos de adaptar una recta a una curva, veríamos que en cualquier posición que la colocásemos sobre ella, la curva se saldría siempre de la recta sin que en ningún momento lográsemos conseguir la coincidencia total o parcial de ambas líneas.

Otras definiciones clásicas de línea curva, tal como *la engendrada por el movimiento de un punto que cambia continuamente de dirección*, o como *el lugar geométrico de las posiciones de un punto móvil*, requieren el concepto intuitivo y cinemático de movimiento, que no es puramente geométrico, pero que nos hace llegar con facilidad al concepto de su forma cuando se define claramente la ley con que se mueve el punto generador.

3. Clasificación.

Las curvas en general se clasifican en dos grandes grupos: **Curvas planas** y **curvas alabeadas.**

Se dice que una curva es *plana* cuando todos sus puntos están contenidos en un plano llamado *plano de la curva*, Como un plano queda determinado por tres puntos cualesquiera, tomando tres puntos arbitrarios de la curva que nos definen el plano de la misma, se ha de verificar que cualquier otro punto de dicha curva tomado arbitrariamente, *se encuentra* en dicho plano.

Por el contrario, se dice que una curva es *alabeada* cuando no está, ni en su totalidad ni en cualquiera de sus partes, contenida en un plano. Es decir, que si tomamos tres puntos arbitrarios de la curva que nos definen

un plano, cualquier otro punto de dicha curva *no se encuentra* en el mencionado plano.

Tanto las curvas planas como las alabeadas pueden tener una generación arbitraria no sujeta a ley o movimiento geométrico, o por el contrario, estar definida por una ley más o menos compleja. Las primeras no tienen interés técnico alguno; las segundas son las de única aplicación al dibujo técnico y las exclusivamente estudiadas en su aspecto geométrico o analítico.

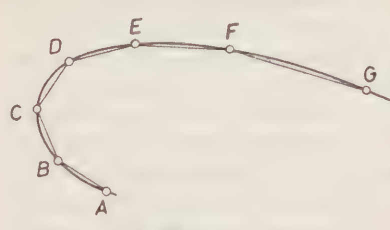


Figura 1

En el estudio de las curvas que hacemos a continuación, consideraremos las propiedades generales de las mismas, tanto para las curvas planas como para las alabeadas, salvo referencia expresa de lo contrario.

3. Tangente.

Vamos a estudiar las propiedades generales de las curvas técnicas que nos permitan obtener conceptos claros y precisos de ellas.

Supongamos (fig. 1) una curva cualquiera, plana o alabeada. Tomemos sobre ella una serie de puntos consecutivos **A, B, C ... F, G** a distancias arbitrarias, y unámoslos sucesivamente con segmentos rectilíneos, formándose una línea poligonal con sus vértices en la curva (poligonal inscrita en la curva o curva circunscrita a la poligonal). Como hemos supuesto que la línea dada es curva, ningún punto de ella, excepto los elegidos para vértices de la línea poligonal, estarán en los segmentos **AB, BC, CD, ...,** etc.

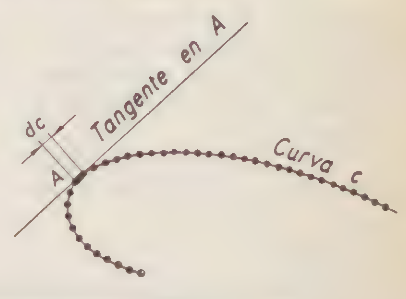


Figura 2

Esta línea poligonal puede darnos una imagen aproximada de la curva, si elegimos sus vértices relativamente próximos entre sí, y tanto más se aproximará a dicha forma cuanto más cerca los tomemos. Si mediante una ley arbitraria vamos haciendo cada vez más pequeños los segmentos **AB, BC, CD, ...,** etc., dicha poligonal se irá aproximando progresivamente a la forma de la curva, y si mentalmente continuamos el proceso hasta hacerse los lados de la misma *infinitamente pequeños*, la poligonal coincidirá en este límite con la curva dada (fig. 2). Por consiguiente también podemos definir una curva cualquiera como el *límite hacia el cual tiende una poligonal de lados infinitamente pequeños y número infinitamente grande*. Bajo este punto de vista podemos considerar a los lados infinitamente pequeños de esta poligonal como *elementos rectilíneos* de la curva.

Toda recta que una dos puntos cualesquiera de una curva, a distancia finita, se llama *secante*. En la figura 1, son secantes las rectas **AB, BC, CD, ...,** etc. Toda secante intercepta un arco finito de curva no contenido en aquella, cuyos únicos puntos comunes son los extremos de la curva. Los puntos intermedios del arco de curva subtendida por la secante, son exteriores a ésta.

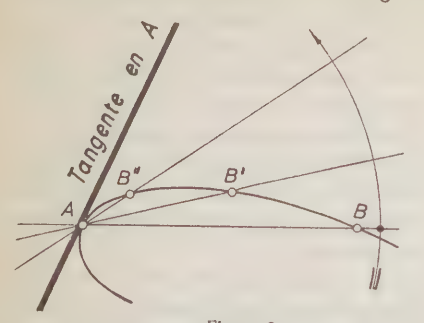


Figura 3

Si consideramos (fig. 3) una curva cualquiera cortada por una secante **AB** y manteniendo fijo el punto **A,** hacemos girar la secante alrededor de dicho punto, de forma que el punto **B** se aproxime continuamente al punto **A,** la recta **AB** irá tomando los posiciones sucesivas **AB', AB'', ...,** etc. Se concibe que habrá una posición de la secante en que el punto **B** coincida con el **A;** en esta posición límite la recta **AB** sólo tendrá un punto común con la curva dada, y se dice entonces que dicha recta es *tangente* a la curva en el punto considerado. Por consiguiente, podemos definir como recta tangente a una curva en un punto de ella, al *límite de las posiciones de una secante que pasando por dicho punto, gira alrededor de él hasta que el otro punto coincida con éste.*

Según las consideraciones anteriores, la tangente en un punto cualquiera de una curva puede definirse también como *la prolongación del elemento rectilíneo que contiene al punto dado* (fig. 2).

La tangente en un punto de una curva plana o alabeada, es única.

Tangente en A

A

Normal en A

Figura 4

3. Normal.

Definida con toda generalidad la recta tangente a una curva en un punto de ella, llamaremos *normal* correspondiente a dicho punto, a *la recta perpendicular a la tangente en el punto de contacto.* Gráficamente la normal es la perpendicular en el centro del elemento rectilíneo que define la tangente (fig. 4).

Como a una recta se le pueden trazar infinitas perpendiculares por un punto de ella, contenidas todas en un plano perpendicular a la misma que pasa por el punto considerado, se deduce de la definición de normal que existe un número infinito de ellas para cada punto de la curva, al contrario que ocurre con la tangente, que es única.

Cuando la curva sea plana solo tiene interés en su estudio la normal contenida en el plano de la curva, prescindiéndose generalmente de las infinitas existentes restantes.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

LÍNEAS CURVAS

(continuación)

5. Propiedades de las líneas curvas correlativas con las de una línea poligonal inscrita en ella.

En el párrafo 3 de esta misma ficha (hoja 1), hemos definido una curva como «el límite hacia el cual tiende una línea poligonal de lados infinitamente pequeños y número infinitamente grande». Bajo este punto de vista, toda propiedad gráfica de una línea poligonal, que sea independiente de la magnitud y número de sus lados, podrá hacerse extensiva a las líneas curvas, bastando tan sólo estudiar las modificaciones gráficas y de lenguaje de las correspondientes transformaciones en este paso al límite.

Este es el camino que seguimos en la exposición de las propiedades de las líneas curvas que estudiamos correlativamente con las de los polígonales de lados finitos.

Iniciamos este estudio con las siguientes definiciones y propiedades:

5.1 Polígonos. Líneas curvas.

5.110 Polígonos. Definición.

De acuerdo con la definición dada en la ficha P. G. 2301 para los polígonos planos, que ampliamos para los alabeados, supongamos dada

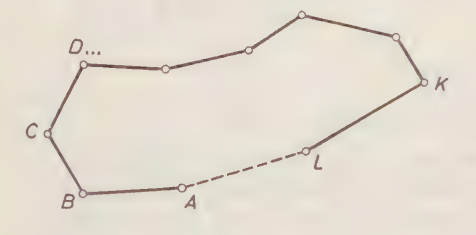


Figura 1

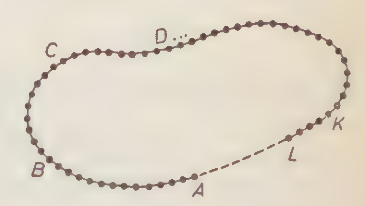


Figura 2

una serie de puntos **A, B, C .... K, L,** en el espacio, con la condición de que no haya tres alineados y entre los cuales hayamos establecido previamente una ordenación circular. Imaginemos unidos cada dos puntos consecutivos por una recta (fig. 1). Denominaremos «**polígono de n vértices A, B, C .... K, L,** ordenados circularmente, situados a distancia finita unos de otros y con la condición de que no haya tres alineados, a la figura resultante de unir sucesivamente con una recta, y en el orden establecido, cada dos puntos consecutivos de los **n** puntos dados».

5.111 Línea curva. Definición.

Si ahora consideramos polígonos en que el número de lados crece indefinidamente y las longitudes de ellos decrecen hasta hacerse infinita-

mente pequeños, estableceremos por analogía la siguiente definición: Se denomina «línea curva de **n** puntos **A, B, C .... ∞**, ordenados circularmente (fig. 2), situados a distancia infinitamente pequeña unos de otros y con la condición de que no haya tres alineados, a la figura resultante de unir sucesivamente con una recta, y en el orden establecido, cada dos puntos consecutivos de los infinitos **n** puntos dados».

5.120 Polígono cerrado y abierto. Orientación.

Si consideramos (fig. 1) que al último punto **L** le sigue el primero **A**, el polígono se dice que es *cerrado.* Si por el contrario, al último punto **L** no le sigue el primero **A**, el polígono se dice que es *abierto.* Para la orientación de un polígono nos remitimos a lo expuesto en la ficha P. G. 2301, párrafo 3.

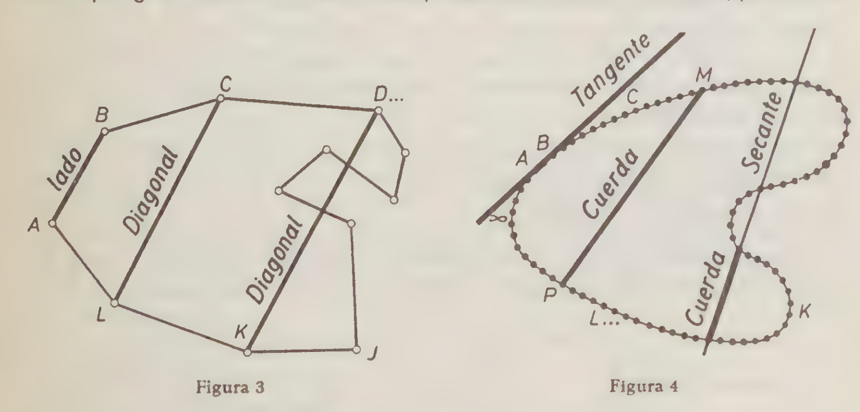


Figura 3 Figura 4

5.121 Curva cerrada y abierta. Orientación.

En el paso al límite estableceremos las siguientes definiciones: Si consideramos (fig. 2) que a algunos de los infinitos puntos de la curva le sigue el punto **A,** la curva se llama *cerrada.* Si por el contrario, a ninguno de sus infinitos puntos no le sigue el punto **A,** la curva se llama *abierta.* La orientación de una curva es igual que la de los polígonos (ver ficha P. G. 2301, párrafo 3).

5.130 Polígonos.-Lados. Diagonales.

A los segmentos **AB, BC, ... JK, KL,** (fig. 3) que unen dos vértices consecutivos se los denominan *lados* del polígono, y a los que unen dos vértices no consecutivos **KD, CL ....** se les llaman *diagonales;* una diagonal (**KD**) puede cortar o no (**CL**) a otros lados del polígono.

5.131 Curvas.-Elementos; tangente. Cuerda; secante.

En el paso al límite estableceremos análogamente las siguientes definiciones: A los segmentos **AB, BC ....** (fig. 4), infinitamente pequeños, que unen dos puntos consecutivos de una curva se les denominan *elementos de curva* y a la recta que contiene exclusivamente este elemento se la denomina *tangente*, de acuerdo con lo establecido en el párrafo 3, hoja 1 de esta misma

 |

ficha. Como la tangente a una curva contiene un solo elemento de la misma, se dice que ambas líneas tienen un *contacto de primer orden.*

A todo segmento finito **MP** que une dos puntos no consecutivos de una curva se le denomina *cuerda*, y a la recta que la contiene se la llama *secante;* una cuerda o secante puede pasar o no por otros puntos de la curva.

5.140 Polígonos.-Mediatrices de sus lados.

En cada lado **AB, BC .... KL,** (fig. 5) de un polígono podemos considerar sus mediatrices respectivas (ver ficha P. G. 2131). Cada una de ellas goza de la propiedad de ser el lugar geométrico de los infinitos centros de circunferencias que pasan por los extremos de los lados respectivos (ver ficha P. G. 2802, l. g. n.º 5).

Como a una recta se le pueden trazar infinitas perpendiculares por un punto de ella, contenidas todas en un plano perpendicular a la misma, cada lado del polígono tiene infinitas mediatrices.

5.141 Curvas.-Normal.

En el paso al límite, estableceremos análogamente las siguientes definiciones: Para cada elemento de curva **AB, BC,** (fig. 6) infinitamente pequeño podemos considerar su mediatriz respectiva (ver ficha P. G. 2131) que llamaremos *normal* a la curva en el elemento correspondiente. Según esta definición, para cada elemento de curva existen infinitas normales contenidas en un plano perpendicular al mismo que pasa por su centro. Toda normal goza de la propiedad de ser el lugar geométrico de los infinitos centros de circunferencias que pasan por los extremos del elemento respectivo. Por ser dicho elemento de longitud infinitamente pequeña, toda circunferencia de radio finito, trazada con centro en la normal y que pase por los extremos del mencionado elemento, tiende a confundirse con él en este entorno y por lo tanto contiene a dicho elemento; por este motivo se dice que cualquiera de estas circunferencias tiene con la curva un *contacto de primer orden.*

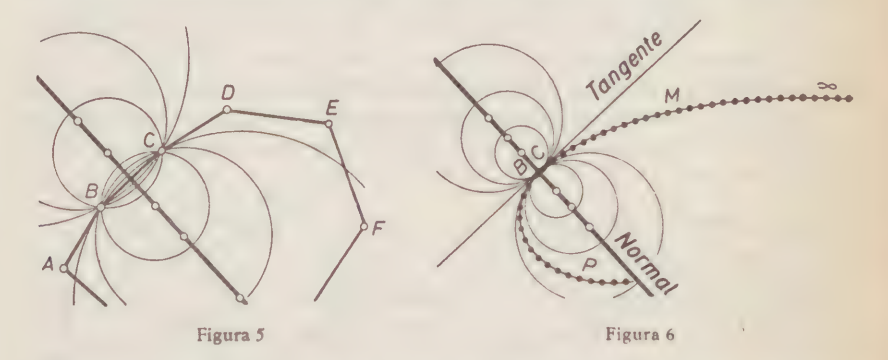


Figura 5 Figura 6

Si consideramos prolongado un elemento cualquiera de una curva y trazada su normal, podemos decir que «la tangente en un punto de una

curva y las infinitas circunferencias tangentes a la recta anterior y con centro en la normal, tienen todas ellas un *contacto de primer orden* con la curva en el punto considerado».

5.150 Polígonos.-Polígonos planos. Polígonos alabeados.

Dos lados consecutivos **AB, BC** (fig. 1) de un polígono, determinan un plano. Si el tercer lado **CD** que le sigue, está en el mismo plano, e igual ocurre con los siguientes, el polígono se llama *plano*. Por el contrario, si dicho tercer lado consecutivo **CD** no está en el plano de los **AB** y **BC**, y lo mismo ocurre con los siguientes lados con respecto a sus dos anteriores, el polígono se llama *alabeado*.

5.151 Curvas.-Curvas planas. Curvas alabeadas.

En el paso al límite, estableceremos las siguientes definiciones: Dos elementos consecutivos **AB, BC** (fig. 2) de una curva, determinan un plano. Si el tercer elemento **CD** que le sigue está en el mismo plano, la curva se llama *plana*, según vimos en el párrafo 2.1, hoja 1 de esta ficha. Por el contrario, si dicho tercer elemento consecutivo **CD** no está en el plano de los anteriores **AB, BC,** y lo mismo ocurre con los siguientes elementos con respecto a sus dos anteriores, la curva se llama *alabeada*.

5.160 Polígonos.-Ángulo interior. Ángulo exterior.

El ángulo **ABC** (fig. 7), formado por dos lados consecutivos de un polígono, se le denomina *ángulo interior* (ver definición de ángulo en la ficha P. G. 2110). Su adyacente α (**FBC** o **GBA**) se llama *ángulo exterior*.

Si trazamos ahora las mediatrices **MO** y **NO** a los lados **AB** y **BC** respectivamente, en el plano formado por dichos lados, éstas se cortarán en un punto **O,** formando entre sí el ángulo β (**MON**), llamado *ángulo normal*. El ángulo normal tiene, por construcción, los lados del mismo sentido respectivamente perpendiculares a los lados del ángulo exterior, por lo que serán iguales entre sí ($\alpha = \beta$).

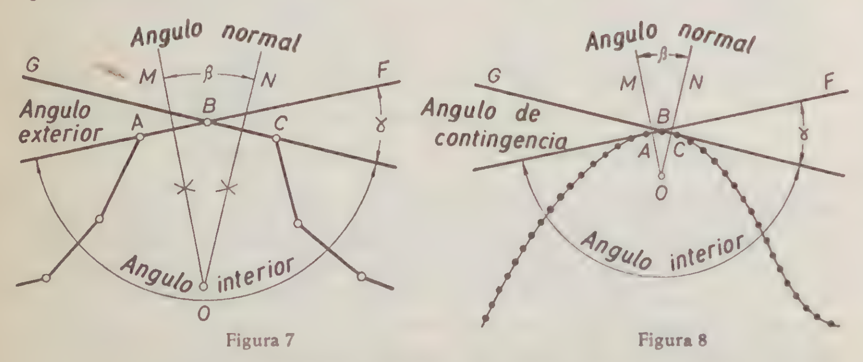


Figura 7 Figura 8

La mayor o menor amplitud del ángulo exterior nos puede servir en cierto modo como medida de la desviación que experimenta un lado del polígono con respecto al lado anterior.

LÍNEAS CURVAS

(continuación)

5.161 Curvas.-Ángulo interior. Ángulo de contingencia.

En el paso al límite estableceremos análogamente las siguientes definiciones: El ángulo **ABC** (fig. 8) formado por dos elementos consecutivos de una curva se le denomina *ángulo interior* (ver definición de ángulo en la ficha P. G. 2110). Su adyacente α (**FBC** o **GBA**) se llama *ángulo de contingencia* o también *ángulo de flexión*. El ángulo interior tiende al valor de dos rectos sin llegar nunca a alcanzarlo; el ángulo de contingencia tiende a ser nulo, sin llegar nunca a serlo.

Si trazamos ahora las normales **MO** y **NO** a los elementos **AB** y **BC** respectivamente, en el plano formado por dichos elementos, éstas se cortarán en un punto **O** formando entre sí el ángulo β (**MON**), llamado *ángulo normal*, El ángulo normal tiene, por construcción, los lados del mismo sentido respectivamente perpendiculares a los lados del ángulo de contingencia, por lo que serán iguales entre sí ($\alpha = \beta$).

La mayor o menor amplitud del ángulo de contingencia nos puede servir en cierto modo como medida de la desviación que experimenta un elemento de la curva can respecto al anterior.

5.170 Polígonos.-Plano determinado por dos lados consecutivos. Circunferencia que pasa por tres vértices consecutivos. Centro y radio de la misma.

Consideremos dos lados consecutivos **AB, BC** de un polígono (fig. 9); estos dos lados nos determinarán un plano que los contiene, y al mismo

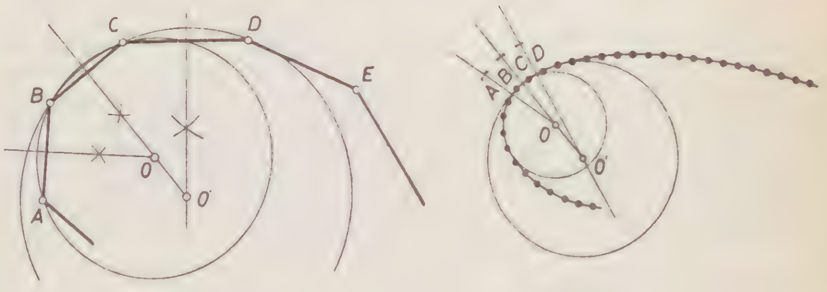


Figura 9 Figura 10

tiempo formarán el triángulo **ABC** contenido en él. Tracemos en dicho plano las mediatrices a ellos; estas dos mediatrices se cortarán en un punto **O**, circuncentro del triángulo **ABC** (ver ficha P. G. 2202, párrafo 2). El punto **O** será pues el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, y su radio será **OB** (también OA u OC).

Si consideramos ahora el lado siguiente **CD,** que estará o no en el plano **ABC,** según sea el polígono plano o alabeado (ver párrafo 3, hoja 1 de esta ficha), se nos formará un nuevo triángulo **BCD,** cuyo plano y circuncentro **O'** serán en general distintos de los del **ABC.** Por consiguiente, la circunferencia circunscrita al triángulo **BCD,** de centro **O'** *no pasará* por A (excepto si los cuatro vértices A, B, C, y D son concíclicos).

5.171 Curvas.-Plano osculador. Circunferencia osculatriz. Centro de curvatura. Radio de curvatura.

En el paso al límite estableceremos análogamente las siguientes definiciones: Consideremos dos elementos consecutivos **AB, BC** de una curva (fig. 10); estos dos elementos nos determinarán un plano que los contiene, llamado *plano osculador*, y al mismo tiempo formarán el triángulo **ABC** contenido en él. Tracemos en dicho plano las normales a los dos elementos considerados; estas dos normales se cortarán en un punto **O,** circuncentro del triángulo **ABC** (ver ficha P. G. 2202, párrafo 2). El punto **O** será el centro de la circunferencia circunscrita al mencionado triángulo **ABC** y se le llama *centro de curvatura.* El radio **r** de dicha circunferencia se le denomina *radio de curvatura* y a la circunferencia circunscrita, *circunferencia osculatriz.* Todos estos conceptos se refieren a dos elementos consecutivos tomados a partir de cualquier punto de la curva.

Si consideramos ahora el elemento siguiente **CD,** que estará o no en el plano **ABC,** según sea la curva plana o alabeada (ver párrafo 3, hoja 1 de esta ficha), se nos formará un nuevo triángulo **BCD,** cuyo plano y circuncentro **O'** serán en general distintos de los del **ABC.** Por consiguiente, la circunferencia circunscrita al triángulo **BCD,** de centro **O',** *no pasará* por **A** (excepto si los cuatro vértices A, B, C, y D, son concíclicos).

Ya hemos visto en el párrafo 5.141 hoja 2 de esta ficha, que la normal a una curva en un punto de ella y trazada sobre el plano osculador, tiene la propiedad de ser el lugar geométrico de los infinitos centros de circunferencias que pasan por los extremos del elemento correspondiente al punto considerado. Por consiguiente también contiene al centro de curvatura de la circunferencia osculatriz correspondiente a dicho elemento y al siguiente. Pero tan sólo la circunferencia osculatriz, de todas las infinitas anteriores, contiene al segundo elemento de la curva. De esto se deduce que las primeras tienen con ella un *contacto de primer orden*, y la circunferencia osculatriz tiene con la curva un *contacto de segundo orden.*

5.18 Curvas.-Curvatura.

Hemos visto en el párrafo 5.161, hoja 2 de esta ficha que la desviación de un elemento de curva con respecto al siguiente viene expresada por su ángulo de contingencia. Si estas variaciones son continuas y están sujetas a una ley analítica, dan lugar a muy diversas curvas empleadas en la técnica. En todas ellas, cuando el ángulo de contingencia aumenta, se dice que aumenta la *curvatura* de la curva en el punto considerado, y recíprocamente

cuando el ángulo de contingencia disminuye, también disminuye la curvatura. Por el contrario, cuando aumenta la curvatura, disminuye el radio de la circunferencia osculatriz; por este motivo se define la curvatura como el valor inverso de dicho radio

$$C = \frac{1}{r}$$

6. Curvas alabeadas.-Ángulo de torsión. Triedro fundamental.

En el párrato 5.171 de esta ficha hemos definido el plano osculador en un punto de la curva como el formado por dos elementos consecutivos correspondientes al punto considerado.

Si la curva es plana, el plano osculador para cada punto de la curva se confunde con el plano de la misma.

En las curvas alabeadas esto no ocurre, y el plano osculador varía continuamente de posición. Al ángulo diedro formado por dos planos osculadores sucesivos se le llama *ángulo de torsión* y permite estudiar su curvatura en el segundo concepto que en ella se considera.

Para el estudio de las propiedades de las curvas alabeadas es preciso conocer en cada momento la posición del plano osculador, así como la de la tangente y la normal contenida en este plano, llamada por este motivo *normal principal;* estas dos rectas son perpendiculares entre sí. Si se considera ahora, entre las infinitas normales que pasan por un punto de la curva (ver párrafo 5.141, hoja 2 de esta ficha), aquélla que es perpendicular al plano osculador, llamada *binormal*, tendremos que la tangente, la normal y la binormal forman entre sí un triedro trirrectángulo. Este triedro se conoce con el nombre de *triedro fundamental*, y su posición es variable en todos los puntos de una curva alabeada.

7. Curvas.-Puntos singulares.

En el estudio de una curva determinada es conveniente conocer la posición de algunos puntos especiales de propiedades características y diferentes de los demás de la curva, llamados *puntos singulares*. Estas propiedades dependen fundamentalmente de las variaciones que experimenta la curvatura de la línea en el punto considerado, que a su vez depende de las del ángulo de incidencia, relacionadas con la posición de la tangente o tangentes (pueden ser más de una) a la curva en dicho punto.

7.1 Punto de inflexión.

Si consideramos engendrada una curva por el movimiento de un punto que cambia continuamente de dirección (ver párrafo 2, hoja 1 de esta misma ficha), y en dicho movimiento (fig. 11) el ángulo de contingencia es continuamente decreciente hasta llegar a ser nulo en un punto de ella, y a partir de este punto vuelve a crecer continuamente, pero en sentido contra-

rio, al punto donde se verifica el cambio de curvatura se le denomina *punto de inflexión* (el **B** de la fig. 11).

Este punto está caracterizado por tener dos elementos contiguos **AB** y **BC** en línea recta, siendo pues nula su curvatura en él (el radio de curvatura se hace infinito); la tangente en dicho punto divide a la curva en dos regiones opuestas y tiene con ésta un *contacto de segundo orden*, por tener dos elementos comunes.

7.2 Punto anguloso.

Si el movimiento del punto generador de una curva cambia bruscamente de dirección (fig. 12), el ángulo de contingencia pasará sin continui-

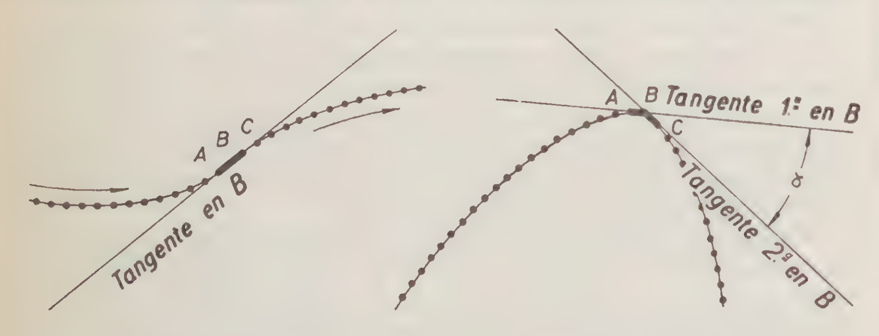


Figura 11

Figura 12

dad de un valor infinitamente pequeño a un valor finito. Se dice entonces que la curva tiene en dicho punto un *punto anguloso*,

Este punto (el **B** en la fig. 12) está caracterizado por ser finito y dis-

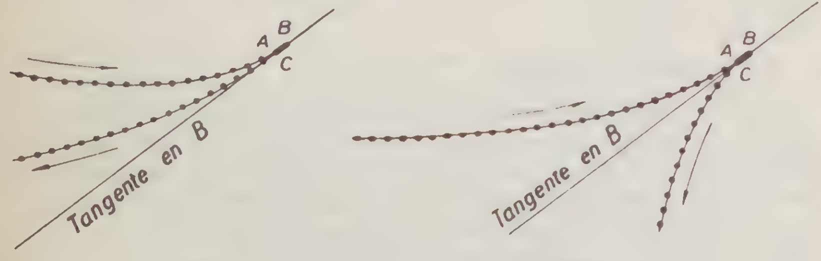


Figura 13

Figura 14

tinto de un llano, el ángulo interior de dos elementos contiguos **AB** y **BC** (ver párrafo 5.161, hoja 3 de esta ficha); el ángulo de contingencia α tiene en dicho punto un valor finito. Por este motivo, la prolongación de los dos elementos **AB** y **BC** que pasan por **B**, forman un ángulo determinado, de donde se deduce que un punto anguloso tiene siempre *dos tangentes;* la circunferencia osculatriz sufre en dicho punto un cambio brusco de posición mediante un giro finito alrededor del punto **B**.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

LÍNEAS CURVAS
(continuación)

7.3 Punto de retroceso.

Si el punto generador de una curva, retrocede en su movimiento sobre su tangente en un punto determinado de ella, a dicho punto se le llama *punto de retroceso.*

En el punto de retroceso son coincidentes dos elementos consecutivos **AB** y **BC,** por lo que la tangente en dicho punto es única. Si al continuar

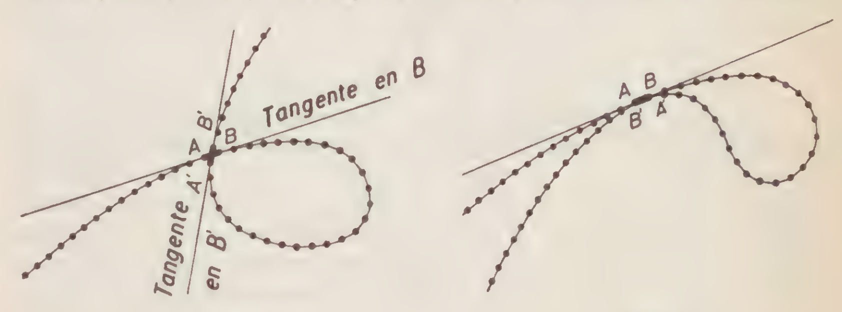


Figura 15 Figura 16

el movimiento, las dos ramas de la curva (fig. 13) quedan a un mismo lado de la tangente, se dice que el punto de retroceso es de *primera especie,* Si por el contrario (fig. 14), las dos ramas de la curva quedan a distinto lado de la tangente, se dice que el punto de retroceso es de *segunda especie.*

7.4 Punto múltiple.

Si una curva pasa varias veces por un mismo punto, se llama a éste *punto múltiple,* denominándose punto doble, triple, etc., según el número de veces que la curva pasa por dicho punto.

Un punto múltiple **A** tiene en general tantas tangentes en él como ramas pasen por el mismo (fig. 15), pudiendo reducirse este número según sean coincidentes algunos o todos los elementos de las distintas ramas de la curva en dicho punto. En este último caso la tangente es única (fig. 16).

8. Curvas.-Evoluta. Evolvente.

8.1 Definiciones.

Se denomina *evoluta* de una curva dada, plana o alabeada, al *lugar geométrico de los centros de curvatura de dicha curva.*

A la curva dada se la llama a su vez *evolvente* de su evoluta correspondiente.

Según esta definición, se podría dibujar la evoluta de una curva cualquiera siempre y cuando supiésemos construir este lugar geométrico. Si se conoce la ley de formación de la curva dada, es posible en muchos casos

deducir, por el estudio de sus propiedades gráficas o analíticas, la forma de la evoluta.

Si esta deducción no es fácil, o nos es desconocida, podemos aplicar siempre el procedimiento gráfico aproximado que estudiamos a continuación y que al mismo tiempo puede servir de base para el estudio de la evoluta. Este procedimiento, basado simplemente en la definición de esta curva, es aplicable tanto para las curvas planas como para las alabeadas, si bien para este último caso las operaciones gráficas han de hacerse en el espacio. Esto es solo posible si se conocen y aplican los recursos estudiados en los distintos sistemas de representación, cuyos fundamentos han sido expuestos muy someramente en la ficha G. F. 1002.

8.2 Trazado.

Sea (fig. 17) **a** la curva dada. Tomemos sobre ella una serie de puntos consecutivos 0, 1, 2,... equidistantes entre sí una magnitud arbitraria pero pequeña.

Si los suponemos unidos por segmentos rectilíneos, se nos formará una línea poligonal inscrita a la curva, que tiende a confundirse con ella mientras más se aproximen entre sí sus vértices. Los lados de esta poligonal pueden considerarse con relativa aproximación como elementos de la curva dada (ver ficha P. G. 2440, párrafo 3).

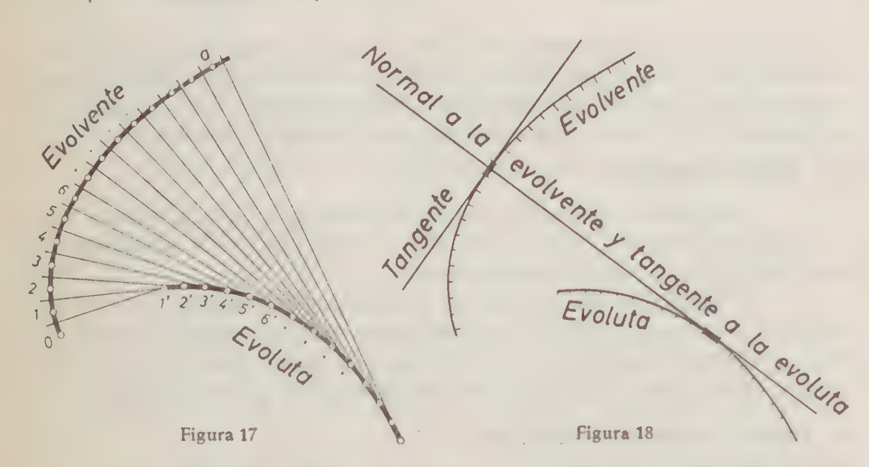


Figura 17

Figura 18

Si trazamos las mediatrices de cada uno de los lados de la línea poligonal (ver ficha P. G. 2131), podemos considerar aproximadamente cada mediatriz como normal a la curva en el elemento correspondiente (ver ficha P. G. 2440, hoja 2, párrafo 5.141). La intersección de dos normales consecutivas nos dará el centro de la circunferencia que pasa por los extremos de los lados correspondientes, y puede considerarse aproximadamente como el centro de curvatura de dichos dos elementos consecutivos (ver ficha P. G. 2440, hoja 3, párrafo 5.171).

Por reiteración de este trazado en todos los lados de la línea poligonal obtendremos una serie de puntos 1', 2', 3'..., lugar geométrico aproximado de los centros de curvatura de la curva dada, que unidos entre sí por un trazo continuo nos dará con suficiente aproximación la forma de la evoluta de la curva.

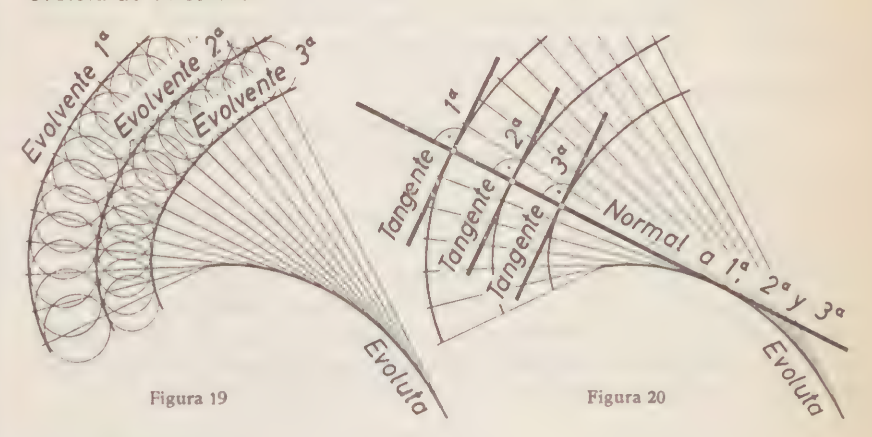


Figura 19

Figura 20

2.3 Propiedades.

Si tomamos relativamente próximos entre sí los puntos 0, 1, 2,... de división de la curva dada, los respectivos centros de curvatura 1', 2', 3',... que sucesivamente se han obtenido con el trazado anterior, estarán también cerca unos de otros, por lo que los segmentos 1'-2', 2'-3', etc., de la nueva línea poligonal obtenida pueden ser considerados a su vez aproximadamente como elementos de la evoluta. Si suponemos prolongado cualquier elemento de ésta, observaremos que según el trazado estudiado, dicha recta coincide con la normal a un elemento de la curva dada (fig. 18).

De aquí se deduce la propiedad siguiente:

La normal en un punto cualquiera de una curva, es siempre tangente en otro punto de su evoluta.

Si imaginamos un hilo inextensible arrollado tensamente y adaptado con la mayor precisión a la evoluta de una curva, de tal forma que su extremo tirante esté sobre un punto **O** de la evolvente, y desenrollamos lentamente el hilo, manteniéndolo constantemente en el plano de dicha evolvente, si ésta es plana, o en los sucesivos planos osculadores, si es alabeada, el punto **O** recorrerá todos los puntos de la mencionada evolvente; luego

A toda evolvente dada le corresponde una sola evoluta.

Si repetimos la operación anterior tomando otro punto **O'** del hilo arrollado sobre la evoluta, diferente del **O**, dicho punto **O'** recorrerá todos los puntos de otra curva distinta de la evolvente anterior, pero que tendrá la misma evoluta; luego

A toda evoluta dada le corresponden infinitas evolventes (fig. 19).

Las normales de todas estas evolventes serán pues comunes, y las distancias entre los puntos de dos evolventes cualesquiera situados sobre la normal común, serán siempre iguales, por lo que a estas evolventes se las llaman también *curvas paralelas.*

Las tangentes a las diversas evolventes en los puntos de su normal común, serán todas perpendiculares a dicha normal (ver ficha P. G. 2440, parrafo 4), y por consiguiente *paralelas entre sí* (fig. 20).

9. Envolvente. Involuta.

En la ficha P. G. 2440, párrafo 2, hemos establecido la definición de curva como concepto intuitivo y cinemático del movimiento de un punto que continuamente cambia de dirección.

Pero también una línea curva cualquiera puede considerarse a su vez engendrada, no por el movimiento de un punto, sino por el movimiento de otra línea cualquiera (recta o curva) que se mueve siguiendo una ley geométrica, analítica o mecánica. Si la línea móvil se desplaza en el plano o en el espacio de una forma continua sin cambios bruscos de dirección, en cada dos posiciones consecutivas habrá en general un punto de intersección de la curva móvil con su posición siguiente infinitamente próxima.

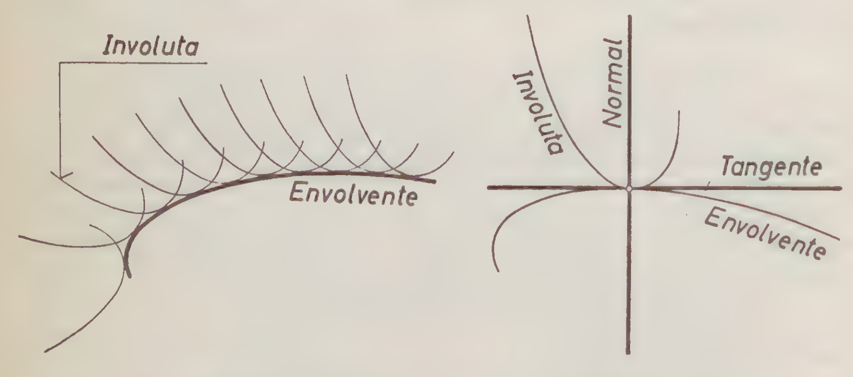


Figura 21 Figura 22

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores podemos definir también una curva como el *lugar geométrico de los puntos de intersección de una línea móvil consigo misma en su posición infinitamente próxima,*

Esta curva engendrada según la definición anterior (fig. 21) envuelve, por decirlo así, a todas las posiciones de la curva móvil, siendo siempre *tangente* a cualquiera de dichas posiciones. Por estos motivos a la curva engendrada se le da el nombre de *envolvente*, y a la curva generatriz (curva móvil), el de *involuta.*

La involuta y la envolvente tienen siempre común, en su punto de contacto, la tangente y la normal (fig, 22).

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

CURVAS CÓNICAS

1. Generalidades.

Las *curvas cónicas,* llamadas también *curvas de segundo grado,* tienen una importancia primordial en las ciencias matemáticas. El estudio de sus propiedades analíticas y gráficas es indispensable en la técnica actual, donde a cada paso surgen sus aplicaciones. En el dibujo técnico es necesario conocer perfectamente su generación y propiedades fundamentales, por su constante aplicación.

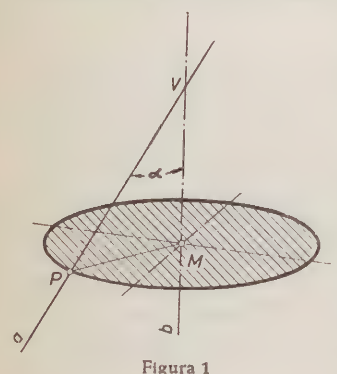


Figura 1

El nombre de «curvas cónicas» proviene de que estas curvas se obtienen por la intersección de un plano con una superficie cónica de revolución; también se las conoce por el nombre de «curvas de segundo grado», debido a que su ecuación analítica, referida a un sistema de ejes cartesianos o polares, es de segundo grado.

2. Superficie cónica de revolución.

Para poder estudiar las curvas cónicas vamos a establecer previamente la definición de «superficie cónica de revolución».

Imaginemos (fig. 1) dos rectas **a** y **b** indefinidas y coplanarias. Supongamos fija una de ellas (la **b** p. e.) y hagamos girar la otra (la **a**) alrededor de la primera; la superficie engendrada por ésta, se la denomina *superficie cónica de revolución,* y al punto de intersección **V** de ambas rectas (propio o impropio), *vértice.* A la recta móvil se la llama *generatriz,* y a la fija *eje de giro* o simplemente *eje.* A las sucesivas posiciones de la generatriz en su movimiento, las denominaremos con el nombre genérico de *generatrices.*

Cualquier punto **P** de la recta **a**, excepto el de intersección con la **b** describe una circunferencia, cuyo plano es perpendicular al eje de giro **b** y cuyo radio es la distancia de **P** a **b**.

Como las rectas **a** y **b** son cualesquiera, sólo pueden ocupar en el plano las dos posiciones relativas siguientes:

1.ª Rectas paralelas.
2.ª Rectas secantes.

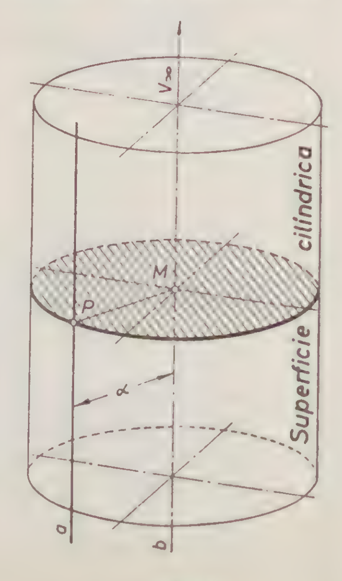


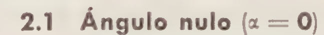
Figura 2

La posición de rectas paralelas puede considerarse como límite de la de rectas secantes, cuando el punto de intersección **V** se traslada hacia el infinito (ver ficha P. G. 2221, párrafo 1), o sea cuando el vértice es impropio.

La superficie engendrada por una recta paralela a otra, que gira alrededor de ésta, se la denomina *superficie cilíndrica de revolución,* y puede considerarse como caso particular de una superficie cónica también de revolución.

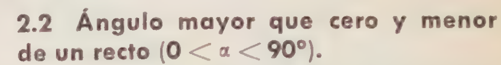
Si a partir de cero, hacemos variar continuamente el ángulo formado por ambas rectas, obtendremos los siguientes casos posibles:

Figura 3



2.1 Ángulo nulo ($\alpha = 0$)

Las dos rectas **a** y **b** son paralelas (fig. 2). La superficie engendrada es *cilíndrica;* cualquier punto **P** de la generatriz describe una circunferencia de *radio constante* e igual a la distancia **PM** entre las paralelas **a** y **b;** el plano de esta circunferencia es perpendicular al eje. Esta superficie cilíndrica, indefinida, consta de *una sola hoja;* el vértice **V** es impropio.



2.2 Ángulo mayor que cero y menor de un recto ($0 < \alpha < 90°$).

Las dos rectas **a** y **b** se cortan oblícuamente (fig. 3). La superficie engendrada es *cónica;* cualquier punto **P** de la generatriz describe una circunferencia de **radio variable PM** decreciente hacia el vértice **V,** siendo dicho radio igual a la distancia de **P** a **b;** el plano de esta circunferencia es perpendicular al eje. Esta superficie cónica, indefinida, consta de *dos hojas* separadas por su vértice **V,** propio.

2.3 Ángulo igual a un recto ($\alpha = 90°$).

Las dos rectas **a** y **b** se cortan perpendicularmente (fig. 4). La superficie engendrada se transforma en un *plano;* cualquier punto **P** de la generatriz describe una circunsferencia de **radio variable PM** decreciente hacia el vértice **V,** siendo dicho radio igual a la distancia de **P** a **b;** el plano de esta circunferencia es perpendicular al eje.

Bajo este punto de vista *el plano puede considerarse como una superficie cónica de revolución de vértice propio.*

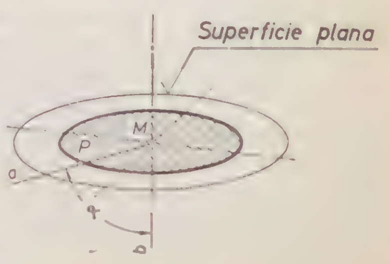


Figura 4

2.4 Ángulo mayor que un recto ($\alpha > 90°$).

Si el ángulo α es mayor de un recto, sin llegar a valer dos, obtendremos de nuevo la superficie cónica de dos hojas representada en la fig. 3.

Si el ángulo α sigue creciendo, se reproducirán sucesiva y ordenadamente los casos de las figuras 2 a 4.

3. Curvas cónicas.

Denominaremos en general *curva cónica* a la obtenida por la intersección de un plano con una superficie cónica de revolución, pudiendo ser una cónica cerrada o abierta, según la posición relativa del plano secante con respecto a la mencionada superficie cónica.

Distinguiremos los siguientes casos posibles:

3.1 El plano secante corta a todas las generatrices de una sola hoja, sin ser perpendicular al eje.

La sección producida es una curva cerrada que denominaremos *elipse*. Para que se produzca una sección elíptica es necesario que el ángulo β

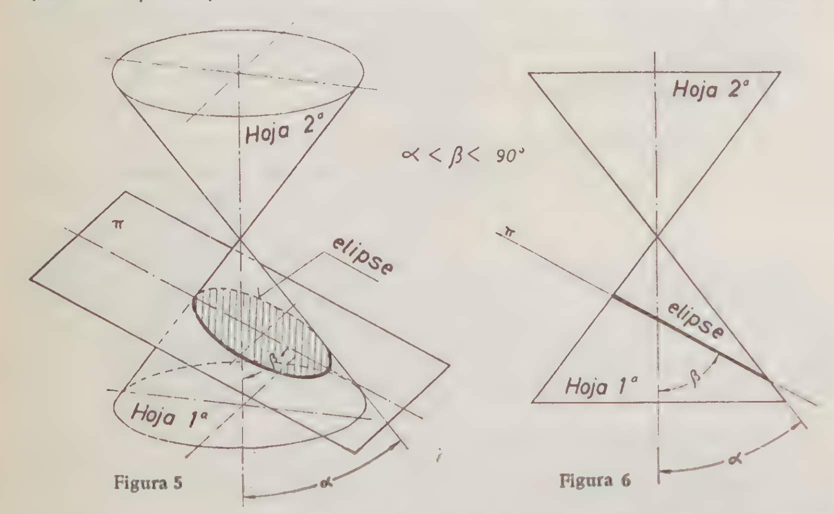


Figura 5 Figura 6

que forma el plano π secante, con el eje de la superficie cónica sea **mayor** que el ángulo α formado por la generatriz con su eje ($\beta > \alpha$).

En la figura 5 representamos en perspectiva esta sección elíptica, y en la figura 6 la vista principal del conjunto * en la que la superficie cónica queda representada por su contorno aparente, y el plano π por su intersección (traza) con el plano del dibujo. En estas condiciones, los ángulos α y β están dados en dicha figura 6 en su verdadera magnitud, y la elipse se proyecta sobre la traza π limitada por las generatrices del contorno aparente de la superficie cónica.

* Proyección ortogonal del conjunto sobre un plano perpendicular al plano π secante.

Imp. Alvarez-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

CURVAS CÓNICAS

(continuación)

3.2 El plano secante corta a todas las generatrices de una sola hoja, siendo a su vez perpendicular al eje.

La sección producida en este caso, que puede considerarse como caso particular del anterior, es una **circunferencia,** según hemos visto en el párrafo 2.2 de esta ficha.

En la figura 7 representamos en perspectiva esta sección circular y en la figura 8 la vista principal del conjunto en condiciones análogas a las fijadas en el párrafo 3.1 para la figura 6.

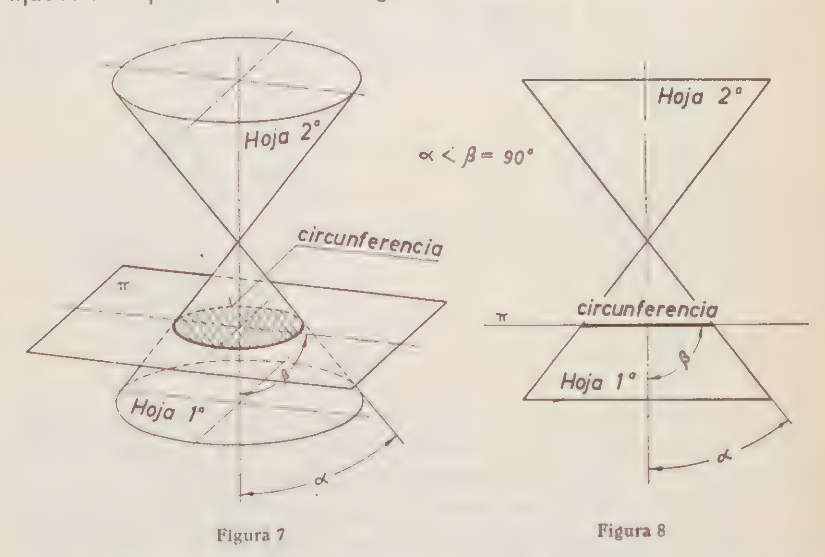


Figura 7

Figura 8

3.3 El plano secante es paralelo a una de las generatrices de la superficie cónica.

Dicho plano secante cortará a todas las generatrices de una hoja excepto a la que es paralelo. La curva obtenida la denominaremos **parábola.** La parábola es una curva abierta de una sola rama.

Para que se produzca una sección parabólica es necesario que el ángulo β que forma el plano π secante con el eje de la superficie cónica sea **igual** al ángulo α formado por la generatriz con su eje ($\beta = \alpha$).

En la figura 9 representamos en perspectiva esta sección parabólica y en la figura 10 la vista principal del conjunio en condiciones análogas a las fijadas en el párrafo 3.1 para la figura 6.

3.4 El plano secante es paralelo a dos generatrices de la superficie cónica.

Dicho plano secante cortará en las dos hojas del cono, a todas las generatrices excepto a las dos a las que es paralelo. La curva obtenida la denominaremos **hipérbola.** La hipérbola es una curva abierta de dos ramas.

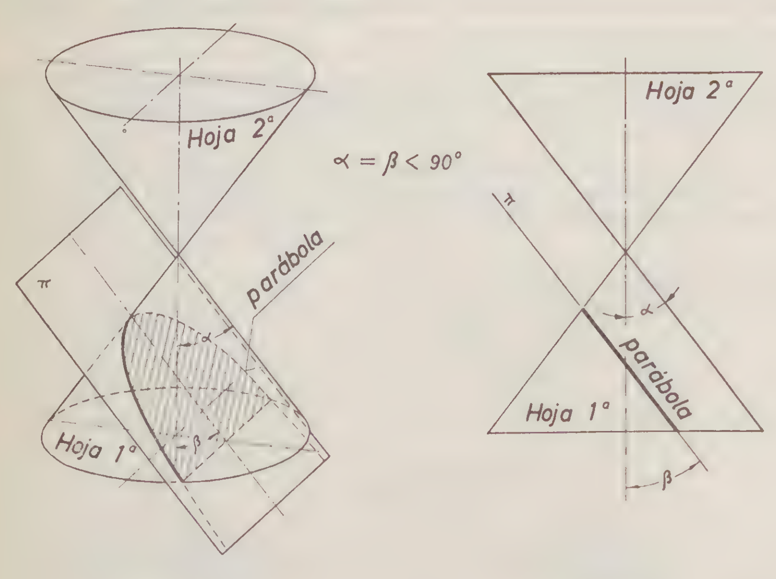


Figura 9 Figura 10

Para que se produzca una sección hiperbólica es necesario que el ángulo β que forma el plano π secante, con el eje de la superficie cónica, sea **menor** que el ángulo α formado por la generatriz con su eje ($\beta < \alpha$).

En la figura 11 representamos en perspectiva esta sección hiperbólica y en la figura 12 la vista principal del conjunto en condiciones análogas a las fijadas en el párrafo 3.1 para la figura 6.

3.5 El plano secante pasa por el vértice del cono.

En estas condiciones pueden darse los siguientes casos posibles:

3.51 El plano secante no contiene a ninguna generatriz. La sección se reduce a un punto (el vértice).

3.52 El plano secante contiene a una generatriz. La sección es una recta (la propia generatriz), y el plano es tangente a la superficie cónica.

3.53 El plano secante contiene a dos generatrices. La sección son dos rectas secantes (las dos generatrices) y el plano corta a la superficie cónica por las mencionadas generatrices.

En los casos 3.51 a 3.53 vemos que las secciones producidas son puntos o rectas, y no líneas curvas; a estas secciones tan particulares se les da, por extensión, el nombre de *cónicas degeneradas.*

3.6. Resumen.

Como resumen de los conceptos expresados en este párrafo, hemos representado en la figura 13 las posibles secciones de una superficie cónica de revolución por un plano.

Dicha figura es la proyección ortogonal de la superficie cónica y de los planos secantes, sobre un plano perpendicular a éstos; el contorno aparente de dicha superficie cónica, limitada por planos normales al eje, es el **A-B-V-C-D,** siendo **V** el vértice. Supongamos ahora un haz de planos que pasa por una recta perpendicular al plano de proyección, y que se cruza con el eje; dicha recta se proyectará en la figura en el punto **0.** Tracemos por el eje del haz dos planos **3-0** y **7-0** paralelos a las generatrices **AVD** y **BVC;** las secciones producidas por estos planos serán parabólicas.

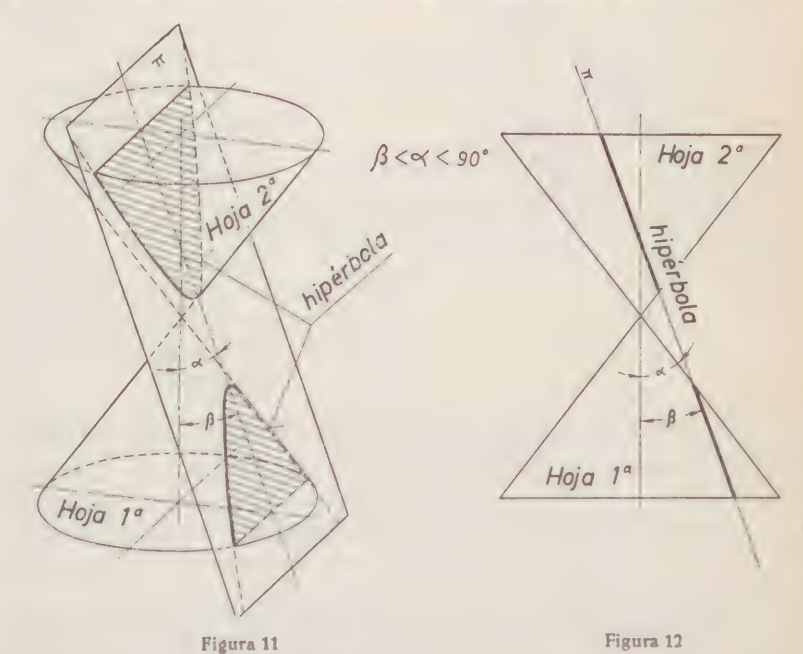


Figura 11

Figura 12

Todo plano del haz que forme con el eje **X-X** un ángulo β mayor que α nos dará una sección elíptica (posiciones **8-0** y **2-0**), circular (posición **9-0**) o un punto (posición **V-0**); todo plano del haz que forme con el eje **X-X** un ángulo β menor que α nos dará una sección hiperbólica (posiciones **4-0, 5-0, 6-0**).

Si suponemos que el plano secante gira alrededor del eje del haz de forma continua, obtendremos sucesivamente todas las secciones cónicas estudiadas, excepto las degeneradas de los casos 3.52 y 3.53 (plano tangente y plano secante que pasan por **V**). Debido a la continuidad del movimiento, las posiciones **7-0** y **3-0** de las secciones parabólicas, son límites de las secciones elípticas en el exterior del diedro **3-0-7** y de las hiperbólicas en el interior de dicho diedro. Igualmente, la sección circular puede considerarse como límite de secciones elípticas.

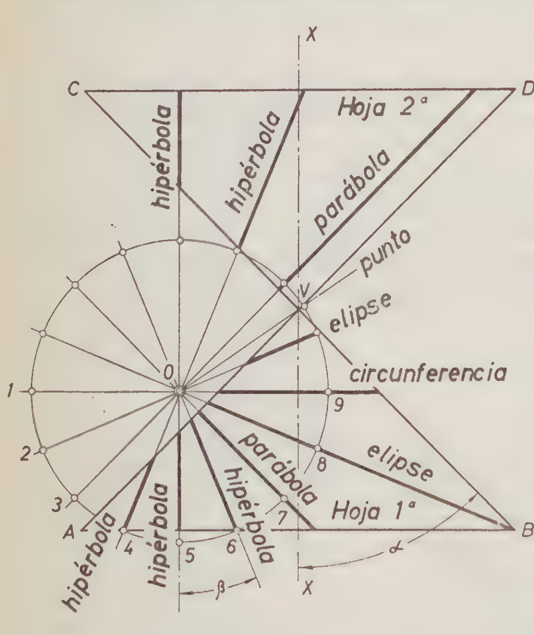


Figura 13

Geométricamente podemos considerar a la parábola (curva abierta de una rama) como curva de transición entre la elipse (curva cerrada) y la hipérbola (curva abierta de dos ramas).

Debido a esta forma continua de generación, existen grandes analogías en las propiedades analíticas y geométricas de la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola, que iremos destacando en su momento oportuno al estudiar en detalle cada una de ellas.

4. Curvas cónicas.-Foco. Eje focal. Vértice. Directriz. Radio vector.

Estudiada en el párrafo 3, la forma de obtención de las curvas cónicas, vamos a definir los elementos fundamentales comunes a todas ellas.

Imaginemos (fig. 14) una curva cónica cualquiera (elipse en la figura), obtenida por la sección de un plano π con una superficie cónica, y tracemos por el eje de ésta un plano **P** perpendicular a π.

Este plano **P** será plano de simetría del cono y por consiguiente también lo será de la cónica sección. La intersección de **P** y π es la recta **X-X'** que será a su vez eje de simetría de la mencionada cónica.

Consideremos ahora en el interior de la superficie cónica, esferas **O** y **O'** que siendo tangentes a dicha superficie lo sean a su vez al plano secante π. En las condiciones antedichas, estas esferas deberán tener sus centros en el eje del cono. Las líneas de contacto de estas esferas con la superficie cónica, serán circunferencias, cuyo plano es perpendicular al eje del

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

CURVAS CÓNICAS

(continuación)

cono y su centro se encontrará también en dicho eje; a su vez dichas esferas tendrán con el plano π un punto de contacto **F** y **F'** situado en la recta **X-X'.**

Proyectando la figura 14 sobre un plano paralelo a **P,** obtendremos, para los casos de curvas cónicas,* las representaciones de las figuras 15 a 17.

En todas ellas, el contorno aparente de la superficie cónica es el **A-B-V-C-D,** limitado por dos planos **AB** y **CD** perpendiculares al eje del cono (bases) y a distancias arbitrarias del vértice **V**. El plano secante π que

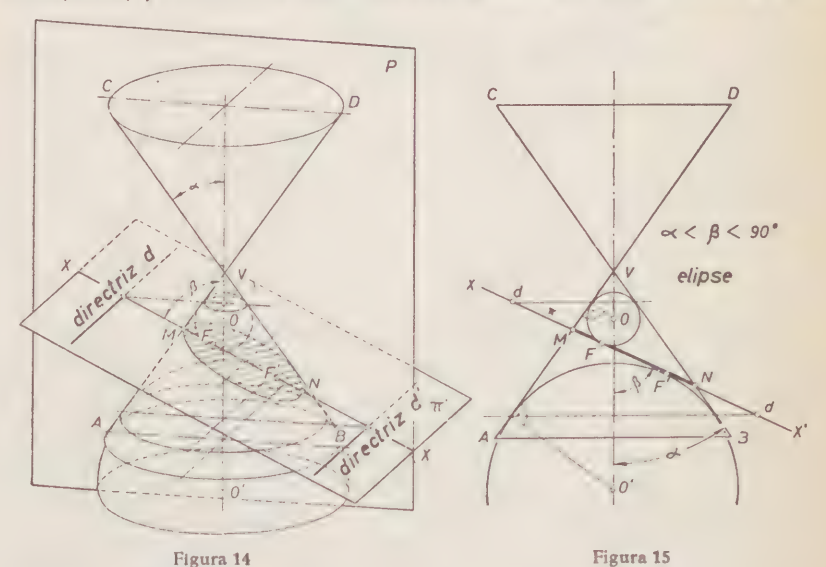


Figura 14 Figura 15

produce la sección cónica respectiva, está representado por la recta de su intersección con el plano del dibujo (traza), y coincide con el eje **X-X'.** Las esferas tangentes al cono y plano π están representadas por circunferencias tangentes a los lados del triángulo **VMN** (ver ficha P. G. 2867).

4.1 Foco.

Se llama foco **F** (**F'**) de una cónica al punto de contacto de su plano π con la esfera inscrita en la superficie cónica y tangente a π. El número de ellos y los casos posibles son los siguientes:

a)	**Elipse**	Dos focos (F, F')	Figura 15
b)	**Parábola**	Un foco (F)	» 16
c)	**Hipérbola**	Dos focos (F, F')	» 17

* Prescindimos de los casos especiales de «circunferencia» y de «cónicas degeneradas» por su escaso interés técnico.

4.2 Eje focal.

Es la recta **X-X'** intersección del plano diametral **P** que pasa por el eje de la superficie cónica y es a su vez perpendicular al plano π de la cónica. El eje focal pasa por el foco o focos de la misma y es eje de simetría de ella. En las figuras 15 a 17 está representado el eje focal de la cónica respectiva por la recta **X-X'**.

4.3 Vértice.

El punto de intersección **M** (**N**) del eje focal con la superficie cónica, se le llama *vértice*. El número de ellos y los casos posibles son los siguientes:

a)	**Elipse**	Dos vértices (M, N)	Figura 15
b)	**Parábola**	Un vértice (M)	» 16
c)	**Hipérbola**	Dos vértices (M, N)	» 17

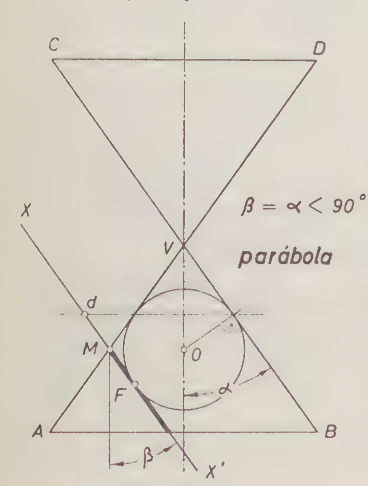


Figura 16

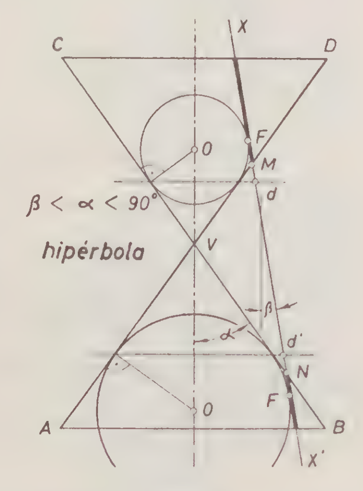


Figura 17

4.4 Directriz.

Llamaremos *directriz* **d** (**d'**) a la recta intersección del plano secante π con el plano de la circunferencia de contacto de la esfera inscrita en la superficie cónica y tangente a π.

La directriz es perpendicular al eje focal, proyectándose en las figuras 15 a 17 en un punto. El número de ellas y los casos posibles son los siguientes:

a)	**Elipse**	Dos directrices (d, d')	Figura 15
b)	**Parábola**	Una directriz (d)	» 16
c)	**Hipérbola**	Dos directrices (d, d')	» 17

4.5 Radio vector.

Se llama *radio vector* al segmento rectilíneo comprendido entre un

punto cualquiera de una cónica y uno de sus focos. En la elipse e hipérbola existen dos radios vectores por cada punto de la curva. En la parábola, considerada como curva de transición de la elipse e hipérbola, uno de los focos se aleja a distancia infinita del otro, y el radio vector correspondiente a éste es paralelo al eje focal y de magnitud infinita.

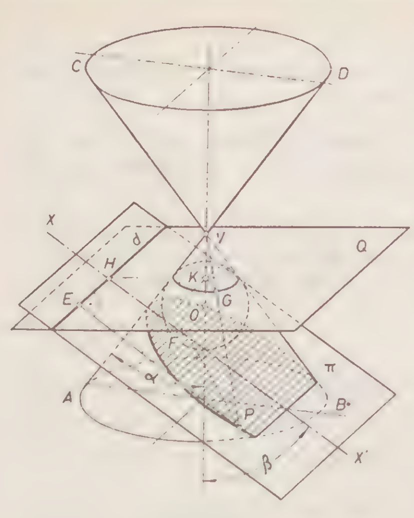


Figura 18

5. Propiedades comunes de las curvas cónicas. Excentricidad.

Supongamos (fig. 18) una cónica cualquiera, obtenida por la sección de un plano π con una superficie cónica de revolución, y consideremos en dicha figura los elementos siguientes ya definidos. **Foco F,** como punto de tangencia de la esfera inscrita **O** (ver párrafo 4.1); **directriz d** correspondiente al foco **F** (ver párrafo 4.4); **eje focal X-X'** (ver párrafo 4.2).

Tomemos un punto cualquiera **P** de la cónica y unámoslo con el foco **F** y con el vértice **V.** La recta **PV** contenida en la superficie cónica (P y V están en ella) será una generatriz y cortará a la circunferencia de contacto de la esfera con la mencionada superficie cónica en el punto **G.** Las rectas **PF** y **PG** son pues rectas tangentes a una esfera trazadas desde **P,** y por consiguiente los segmentos **PF** y **PG** serán iguales entre sí, o sea **PF = PG.**

Tracemos a continuación por el punto **P** y en el plano secante π una recta **PE** paralela al eje focal, que cortará a la directriz **d** en el punto **E;** esta recta y la directriz serán pues perpendiculares, por lo que el segmento **PE** nos mide la distancia de **P** a **d.**

Consideremos ahora los segmentos **PE** y **PG,** que teniendo el extremo común **P,** tienen los otros extremos **E** y **G** en el plano **Q** de la circunferencia de contacto de la esfera **O,** siendo este plano perpendicular al eje de la superficie cónica. Si proyectamos ahora ortogonalmente dichos segmentos **PE** y **PG** sobre el eje de la mencionada superficie cónica* se verificará que ambas proyecciones serán iguales. Ahora bien, siendo **PG** generatriz de la superficie cónica, será «**PG cos** α» su proyección sobre el eje de ella; por otra parte, como **PE** es paralelo al eje focal **X-X'**, y éste forma el ángulo β con el eje del cono (ángulo del plano secante π con dicho eje), se verificará a su vez que su proyección sobre el mencionado eje será «**PE cos** β», y por consiguiente tendremos que: $PG \cos \alpha = PE \cos \beta$

* Se llama proyección ortogonal de un segmento AB sobre una recta m coplanarias o no, a la distancia comprendida entre los puntos de intersección con m de los planos que pasando por A y B son perpendiculares a m

pero según vimos antes, PG = PF, valor que sustituído en la expresión anterior, y transformando ésta, nos da

$$\frac{PF}{PE} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \varepsilon \text{ (constante)} \qquad (1)$$

De la expresión (1) se deduce la importante propiedad común a cualquier cónica que enunciamos explícitamente.

La razón (cociente) de las distancias de un punto de una cónica a un foco y a la directriz correspondiente a dicho foco, es una cantidad constante.

El valor de esta razón constante ε se llama *excentricidad* y es igual a la existente entre los cosenos de los ángulos que forman con el eje de la superficie cónica, el plano π secante (ángulo β) y la generatriz de dicha superficie cónica (ángulo α).

5.1 Excentricidad en la elipse.

Según vimos en el párrafo 3.1, la sección elíptica se produce cuando sea « $\alpha < \beta < 90°$ », en cuyo caso se verificará que « $\cos \beta < \cos \alpha$ », y por consiguiente

$$\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$$

es decir, *la excentricidad en la elipse es un número abstracto menor que uno.*

5.2 Excentricidad en la parábola.

Según vimos en el párrafo 3.3, la sección parabólica se produce cuando sea « $\alpha = \beta < 90°$ », en cuyo caso se verificará que « $\cos \beta = \cos \alpha$ », y por consiguiente

$$\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = 1$$

es decir, *la excentricidad en la parábola es un número abstracto igual a uno.*

5.3 Excentricidad en la hipérbola.

Según vimos en el párrafo 3.4, la sección hiperbólica se produce cuando sea « $\beta < \alpha < 90°$ », en cuyo caso se verificará que « $\cos \beta > \cos \alpha$ », y por consiguiente

$$\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$$

es decir, *la excentricidad en la hipérbola es un número abstracto mayor que uno.*

6. Definición general de una curva cónica.

Basándonos en la propiedad anterior, podemos definir una cónica en general como *el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón ε de distancias a un punto fijo y a una recta contenida en dicho plano, es constante.*

Si ε es menor que la unidad, la curva es una *elipse.* Si ε es igual a la unidad, la curva es una *parábola.* Si ε es mayor que la unidad, la curva es una *hipérbola.*

Según la definición anterior, una cónica queda determinada cuando se conozca uno de sus focos **F**, la directriz **d** correspondiente a ésta y la excentricidad ε. Su construcción con estos datos es posible, si sabemos encontrar puntos del plano que cumplan las condiciones antedichas. En la ficha P. G. 2451 resolvemos esta construcción de tipo general, válida para la elipse, parábola e hipérbola.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

ELIPSE

Teorema de Dandelin. Ejes, relaciones métricas.

ELIPSE

1. Generalidades.

En la ficha P. G. 2450, hojas 1 a 3 hemos estudiado las secciones cónicas en general y algunas de sus propiedades comunes a todas ellas. En esta ficha vamos a ampliar y estudiar nuevas definiciones y propiedades referentes exclusivamente a la sección elíptica. Esta curva se obtiene, según vimos en el párrafo 3.1 de la ficha P. G. 2450 (figuras 5 y 6) cuando se cumple la relación $\alpha < \beta < 90°$.

2. Elipse.-Teorema de Dandelin.

Sea (fig. 1) π el plano secante que produce una sección elíptica en la superficie cónica de revolución de vértice V (ver ficha P. G. 2450, párrafo 3.1). Sean F y F' los focos de la elipse, y A y B los vértices de la misma (ficha P. G. 2450, párrafos 4.1 y 4.3); los puntos A, F, F' y B estarán sobre el eje focal de la elipse. Sean también O y O' los centros de las esferas inscritas en la superficie cónica y tangentes al plano π cuyos puntos de contacto con éste son los focos F y F'.

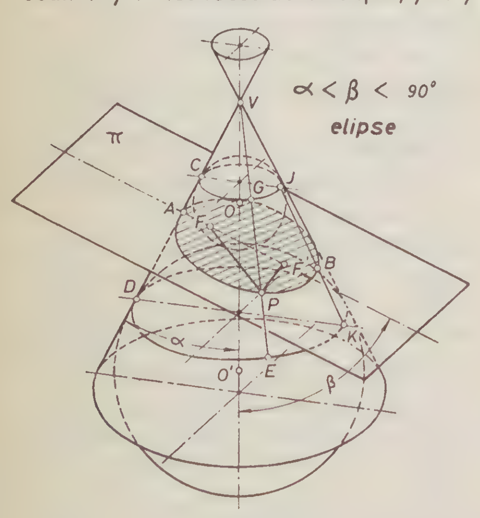


Figura 1

Consideremos ahora un punto cualquiera P de la elipse, que uniremos con los focos F y F'; los segmentos PF y PF' son los radios vectores correspondientes al punto P (ver ficha P. G. 2450, párrafo 4.5). Unamos a continuación el punto P con el vértice V de la superficie cónica; la recta PV será una generatriz de dicha superficie cónica y cortará a las circunferencias de contacto de las esferas O y O' en los puntos G y E respectivamente.

Comparando ahora los segmentos PF y PG, vemos que son iguales entre sí, ya que ambos son tangentes a la esfera O trazadas desde el punto exterior P; igualmente son iguales los segmentos PF' y PE con respecto a la esfera O'. Por consiguiente tendremos:

$$\mathbf{PF = PG}$$
$$\mathbf{PF' = PE}$$

de donde

$$\mathbf{PF + PF' = PG + PE = GE = constante}$$

ya que GE, segmento de generatriz comprendido entre las dos circunferencias de contacto de las esferas inscritas, tiene una longitud constante cualquiera que sea la posición del punto P.

Esta importante propiedad de la elipse que acabamos de deducir, se conoce con el nombre de «Teorema de Dandelin».

3. Elipse.-Ejes; relaciones métricas.

La propiedad enunciada en el Teorema de Dandelin se suele dar como definición de «elipse» en las exposiciones elementales de las curvas de segundo grado, con independencia de la obtención de dicha curva como sección cónica, tal como la hemos estudiado.

Es clásica la siguiente definición:

Se denomina elipse a la curva *lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancia a dos puntos fijos situados en el mismo, es constante y mayor que la distancia entre dichos puntos,*

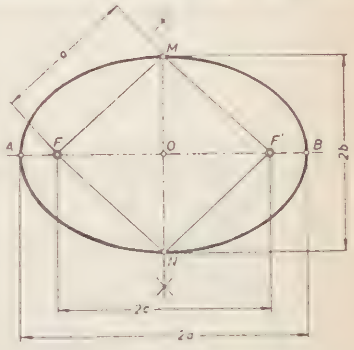


Figura 2

Partiendo de esta propiedad métrica, se deducen otras generales que sirven de base tanto para su trazado como para la obtención de sus tangentes.

Consideremos de nuevo la figura 1, en la que A y B son los vértices de la elipse (ver ficha 2450, párrafo 4.3) y aplicando a ellos el teorema de Dandelin, se verificará que $AF + AF' = BF + BF'$, y siendo $AF' = AF + FF'$ y $BF = BF' + FF'$ tendremos, sustituyendo valores, que $AF + (AF + FF') = (BF' + FF') + BF'$, de donde se deduce que $2\,AF + FF' = 2\,BF' + FF'$, y y por consiguiente

$$AF = BF' \qquad (1)$$

y de ésta

$$AF + AF' = BF' + AF' = AB = \text{constante} \qquad (2)$$

es decir, que *la distancia* AB *entre los vértices de una elipse es igual a la suma de distancias de cualquiera de sus puntos a sus focos.*

A la distancia AB se la denomina *eje mayor* de la elipse y se la suele designar por 2a; a la distancia FF' entre los focos de la elipse se la denomina *distancia focal* y se la suele designar por 2c.

Sea (fig. 2) AB el eje mayor de una elipse y FF' su distancia focal. Tomemos el punto medio O de AB, que será a su vez centro de FF' (por ser, según (1) $AF = BF'$) y tracemos por O la mediatriz a AB que cortará en M y N a la elipse. Por ser MO mediatriz de FF' se verificará que $MF = MF'$, y por pertenecer M a la elipse, tendremos a su vez que $MF + MF' = 2a$, de donde se deduce que $MF = MF' = a$. Igualmente, para el punto N se verificará que $NF = NF' = a$, y los triángulos rectángulos OMF y ONF que tie-

nen sus hipotenusas MF y NF iguales, así como el cateto FO común, serán iguales, de donde deducimos que

$$\mathbf{MO} = \mathbf{NO} = \mathbf{b} \qquad (3)$$

A la distancia MN se la denomina *eje menor* de la elipse y se la suele designar por 2b.

Los segmentos **a, b** y **c** son los lados de un triángulo rectángulo MOF de catetos **b** y **c** y de hipotenusa **a,** existiendo entre ellos la relación

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (4)$$

Los ejes de una elipse son *ejes de simetría* de dicha curva y perpendiculares entre sí. El punto O de su intersección es el *centro* de la misma.

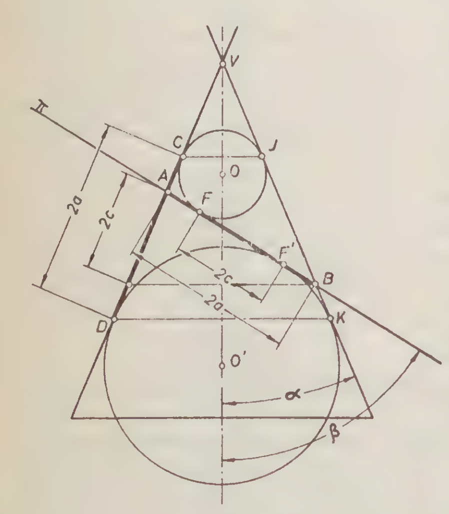


Figura 3

Todo punto del plano de una elipse, cuya suma de distancias a los focos de la misma sea **menor que el eje mayor,** es *interior* a la curva.

Todo punto del plano de una elipse, cuya suma de distancias a los focos de la misma sea **mayor que el eje mayor,** es *exterior* a la curva.

Finalmente indicaremos que, según se demuestra en Geometría racional, la excentricidad definida de forma general para una cónica cualquiera en el párrafo 5. de la ficha P. G. 2450, como relación constante entre los cosenos de los ángulos β y α que forman con el eje de la superficie cónica el plano π secante, y la generatriz de dicha superficie, y que según vimos en el párrafo 5.1 de dicha ficha es menor que *uno* en la elipse, coincide en esta curva con la relación existente entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Es decir, que en la elipse se verifica que

$$\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{c}{a} \qquad (5)$$

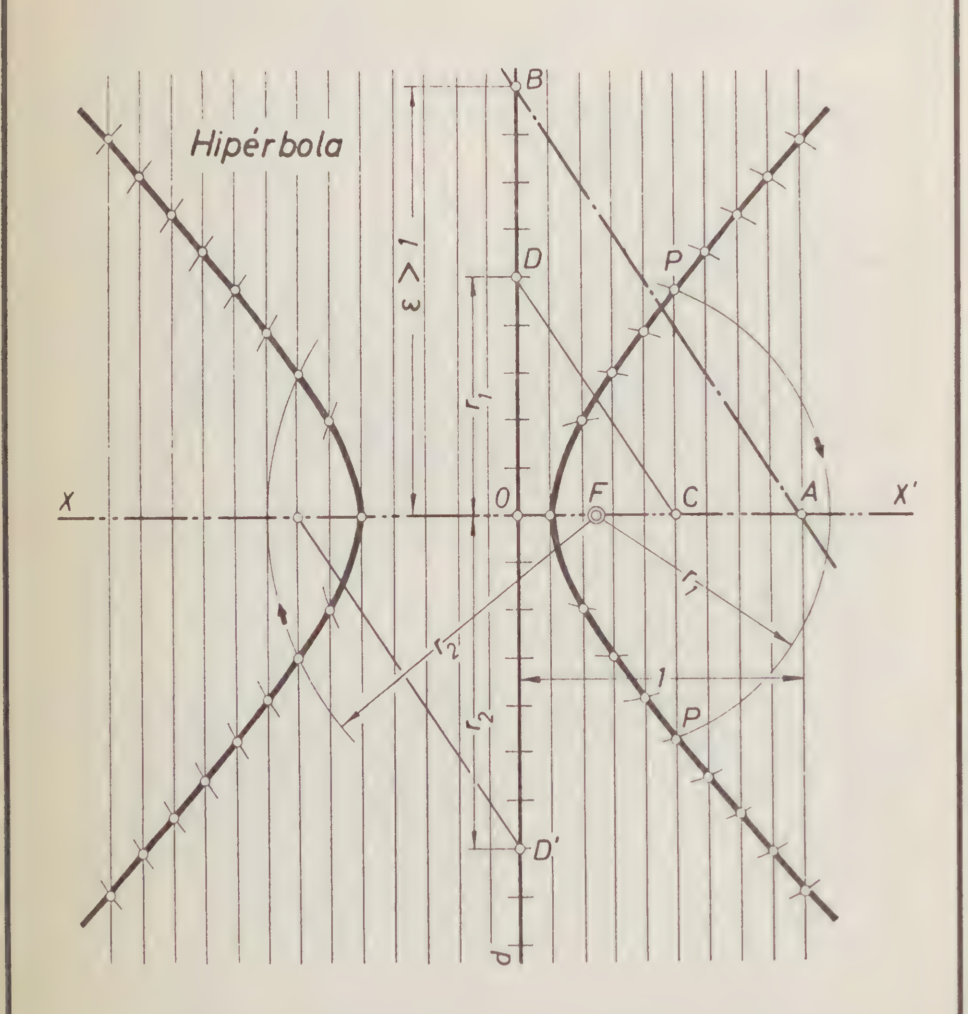
En la figura 3, proyección ortogonal de la figura 1 sobre un plano perpendicular a π, representamos gráficamente las relaciones métricas deducidas, haciendo observar en ella que los segmentos AF y AC son iguales, por ser tangentes desde A a la esfera de centro O, y lo mismo ocurre con los BF' y BK.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una curva cónica conocido uno de sus focos, la directriz y la excentricidad.

ENUNCIADO: *Construir una curva cónica conocido uno de sus focos, la directriz y la excentricidad.*



1. Generalidades.

Basándonos en las definiciones y propiedades generales de las curvas cónicas, estudiadas en las fichas P. G. 2450, hojas 1 a 3, vamos a resolver la construcción por puntos, con un trazado común, de la elipse, parábola e hipérbola, con los datos del enunciado.

Supongamos nos son conocidas gráficamente la posición de una directriz **d** y la del foco **F** correspondiente a ella, así como el valor de la excentricidad ε; este último valor es un número abstracto, y según vimos en el párrafo 5 de la ficha P. G. 2450, hoja 3, representa la relación (cociente) constante que existe entre las distancias de un punto cualquiera de la cónica al foco y directriz respectivamente.

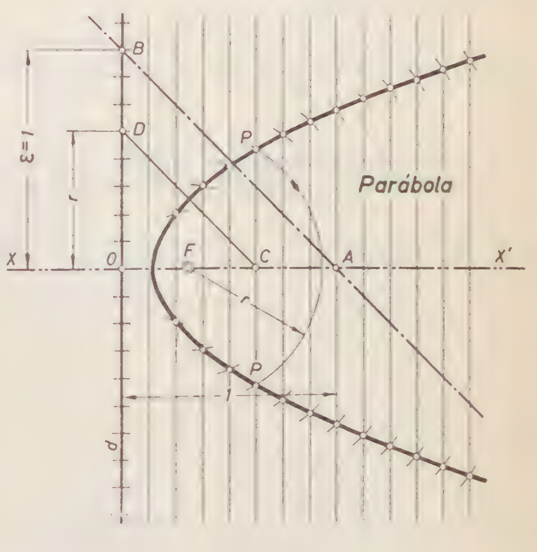


Figura 1

2. Resolución.

Sean **d** y **F** la directriz y focos dados.

2.1 Tracemos por **F** una recta **X-X'** perpendicular a **d** (ver ficha P. G. 2131), siendo **O** el punto de intersección de ambas. La recta **X-X'** será pues el eje focal de la cónica.

2.2 A partir de **O** y en el semiplano de **d** que contiene a **F** tomemos sobre el eje focal un segmento arbitrario* que consideraremos igual a la unidad, con lo que obtendremos el punto **A**.

2.3 A partir de **O** y sobre la directriz **d**, tómese otro segmento igual a la excentricidad ε**, con lo que obtendremos el punto **B**.

2.4 Unamos **A** con **B**.

2.5 Para la obtención de dos puntos cualesquiera de la curva, simétricos con respecto al eje focal **X-X'**, y situados en una perpendicular arbitraria al eje focal (ordenada), cuyo pie sea **C**, bastará trazar por **C** una paralela a **AB** hasta que corte en **D** a la directriz, y haciendo centro en **F** con radio

* Como para la exactitud del trazado, su longitud debe ser relativamente grande, puede tomarse como segmento unidad un decímetro p. e. (100 mm.).

** Si para el segmento unidad se ha tomado la longitud de un decímetro, y la excentricidad es p. e. de 1,5 (caso hipérbola), el segmento OB deberá tener la longitud de $1 \times \varepsilon = 1 \text{ dm} \times 1{,}5 = 1{,}5 \text{ dm} = 150 \text{ mm}$. Si la magnitud del segmento unidad es arbitraria y tiene p milímetros, la longitud OB deberá ser en milímetros $p \times \varepsilon$.

OD trazar un arco que puede cortar a la anterior perpendicular **CP** en dos puntos **P** y **P'** pertenecientes a la cónica*.

2.6 Repitiendo esta operación en otros puntos del eje focal, obtendremos tantos pares de puntos de la curva como deseemos. Para facilitar el trazado puede dividirse el segmento unidad **OA** en un cierto número de partes iguales y el segmento **OB** que nos representa la excentricidad ε en el mismo número de partes también iguales, continuando si es preciso las divisiones en el eje focal y directriz respectivos.

3. Demostración.

Por ser **CD** paralelo a **BA**, los triángulos **OAB** y **OCD** serán semejantes y rectángulos en **O**, por lo que se verificará que

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} \qquad (1)$$

Pero, por construcción es **OD** $= r_1$ o sea la distancia de **P** al foco **F**, y **OC** es a su vez la distancia de **P** a la directriz **d;** por otra parte, y también por construcción, hemos tomado **OA** $= 1$ y **OB** $= \varepsilon$. Sustituyendo estos valores en (1) tendremos:

$$\frac{\varepsilon}{1} = \varepsilon = \frac{PF}{OC}$$

Figura 2

4. Discusión.

Para que el problema sea posible es necesario que el foco **F** esté situado fuera de la directriz. La cónica obtenida será hipérbola, parábola (fig. 1) o elipse (fig. 2), según sea ε mayor, igual o menor que la unidad, según demostramos en el párrafo 5, de la ficha P. G. 2450, hoja 3.

Con esta construcción de tipo general se obtiene la curva por puntos, pero no permite obtener directamente en los casos elipse e hipérbola, otros elementos importantes de ellas, tales como la distancia focal, ejes, etc. En el estudio particular de cada una de estas curvas daremos a conocer otras construcciones relacionadas con estos elementos.

* Si el arco es tangente a la recta CP nos dará un vértice de la cónica y si no la corta, no habrá punto de ella en la ordenada considerada.

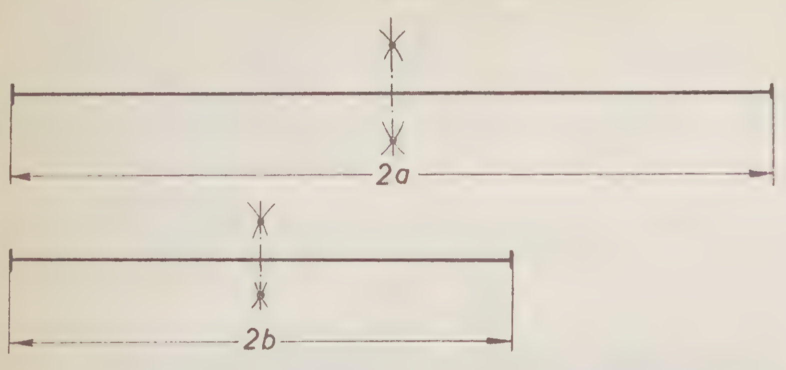
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla | Enero 1966

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una elipse dada la longitud de sus ejes.

ENUNCIADO: *Construir una elipse dada la longitud de sus ejes.*



1. Generalidades.

Para construir una elipse, es preciso fijar de antemano los datos necesarios que la definan completamente. La gran variedad posible en la fijación de estos datos dan lugar a numerosísimos problemas de construcción de esta curva. Entre ellos destacan por su mayor aplicación, los trazados en cuyos datos intervienen las longitudes de sus ejes, la de su distancia focal, la posición de la directriz, la del foco correspondiente a éste y la excentricidad.

La construcción de una elipse conocida la directriz, el foco correspondiente a ésta y la excentridad ε, ha sido resuelta de forma general para cualquier cónica, en la ficha P. G. 2451. No obstante la generalidad de este trazado, es poco corriente su empleo en el dibujo técnico, por obtenerse tan sólo con él puntos de la curva, quedando sin determinar con exactitud otros elementos importantes de la elipse, tales como sus ejes y sus focos.

Como los semiejes **a** y **b** de una elipse y la semidistancia focal **c**, forman un triángulo rectángulo de hipotenusa **a** y catetos **b** y **c** (ver ficha P. G. 2460, párrafo 3), es suficiente conocer la magnitud de dos de los lados de dicho triángulo para poder construirlo. Esto da lugar a los siguientes problemas fundamentales sobre construcción de la elipse:

1.° Construir una elipse dados sus ejes.
2.° Id. dados el eje mayor y la distancia focal.
3.° Id. dados el eje menor y la distancia focal.

Es evidente que todo procedimiento de construcción de la elipse cuando sean conocidos sus ejes (caso 1.°), puede emplearse en los casos 2.° y 3.°, ya que para la determinación del otro eje basta con aplicar previamente las sencillas construcciones dadas en las fichas P. G. 2212 y P. G. 2211 respectivamente, a las que remitimos al lector. Igualmente, cuando los datos del problema sean distintos y se conozca el procedimiento adecuado para que, en función de ellos se puedan determinar sus ejes (como p. e. cuando se conozcan dos diámetros conjugados), es preferible este recorrido indirecto pues como veremos a continuación, la construcción de una elipse por puntos, conocidos sus ejes, es sumamente fácil y rápida.

Esta construcción por puntos se basa en una importante propiedad geométrica que se demuestra en Geometría racional y que a continuación exponemos:

Si hacemos deslizar una recta en un plano, de forma que dos puntos fijos de ella permanezcan constantemente sobre dos rectas secantes situadas en dicho plano (uno en cada recta), cualquier punto de la recta móvil describe una elipse.*

2. Resolución.

El procedimiento de construcción basado en la propiedad anterior, y que a continuación exponemos, es el más aconsejable en la práctica del

* Las rectas secantes pueden ser perpendiculares como caso particular. La propiedad enunciada es general cualquiera que sea el ángulo formado por ellas, e incluso más general aún, ya que también cualquier punto del plano ligado invariablemente a la recta móvil, describe a su vez a una elipse.

dibujo técnico, salvo que se disponga de aparatos especiales de trazado (elipsógrafo) no frecuentes en el comercio.

Supongamos conocidos los ejes de la elipse; sean éstos el segmento **2a** eje mayor y el **2b** eje menor.

2.1 Bisequemos previamente ambos segmentos (ver ficha P. G. 2131) y tracemos dos rectas perpendiculares que se cortarán en **O.**

2.2 Llévese sobre una de ellas y a partir de **O,** a ambos lados de éste, el semieje mayor.

2.3 Llévese sobre la otra, igualmente, el semieje menor.

Con estas dos operaciones obtendremos los puntos **A, B,** extremos del eje mayor y los **M, N,** extremos del eje menor.

2.4 Tómese como portasegmentos, el borde rectilíneo de una hoja de papel (puede también obtenerse este borde por doblez de una hoja irregular) y márquense, a partir de un punto **E** cualquiera del borde, y en la misma semirrecta, los segmentos **EO** y **EO'** iguales respectivamente a los semiejes mayor y menor. El segmento **OO'** será pues la *diferencia de los semiejes* de la elipse pedida.

2.5 Preparado el portasegmentos en estas condiciones, se colocará sobre las perpendiculares trazadas según 2.1, de forma que el punto **O** caiga sobre el eje mayor y al mismo tiempo el punto **O'** esté sobre el eje menor. En estas condiciones el punto **E** nos dará un punto de la elipse.

2.6 Variando la posición del portasegmentos, podremos obtener en cada cuadrante tantos puntos como se deseen.

3. Discusión.

El trazado que acabamos de exponer es de tal rapidez y exactitud que creemos es el que preferentemente debe utilizarse en todo dibujo técnico, ya que los instrumentos y construcciones empleadas son mínimos.

Si, en lugar de tomar sobre el portasegmentos los puntos **O** y **O'** en la misma semirrecta de extremo **E,** lo hacemos en ambas semirrectas, el segmento **OO'** será la *suma de los semiejes* en lugar de la diferencia. El trazado dado sigue siendo válido con esta suma, y aún más preciso si cabe que el anterior; sin embargo, se requiere más espacio por deslizarse los puntos **O** y **O'** fuera de los semiejes, lo cual puede dar lugar a que se salgan de los límites del dibujo.

Aun cuando no es necesario para este trazado la determinación de los focos **F** y **F',** se pueden obtener éstos fácilmente, para construcciones posteriores, tomando una abertura de compás igual al semieje mayor, y con centro en uno de los extremos del eje menor, trazar un arco que corte al anterior eje **AB** en los focos **F** y **F'.**

Los problemas de los casos 2.º y 3.º, enunciados en el párrafo 1, se resuelven de inmediato, previa la determinación del otro eje no dato, empleando el procedimiento anterior.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

ELIPSE

(continuación)

4. Elipse.-Circunferencia focal; propiedades.

Sea (fig. 4) una elipse de ejes AB, MN y de focos F, F' (para la situación de éstos ver ficha P. G. 2461, párrafo 3).

Tomemos un punto P cualquiera de la elipse, y tracemos los radios vectores PF y PF' (ver ficha 2450, párrafo 4.5); tomemos sobre la prolongación de uno de los radios vectores (el PF' p. e.) y a partir de P, una distancia PC igual al otro radio vector (el PF). En virtud de lo demostrado en la ficha P. G. 2460, párrafos 2 y 3, se verificará:

$$\mathbf{AB = PF + PF' = CP + PF' = 2a} \quad \text{(constante)}$$

es decir, que cualquiera que sea la posición del punto P, al efectuar la construcción expuesta anteriormente, el punto C estará siempre a una distancia constante del foco F' igual al eje mayor de la elipse y por lo tanto, el l. g. de las posiciones del punto C será una circunferencia de centro F y radio 2a.

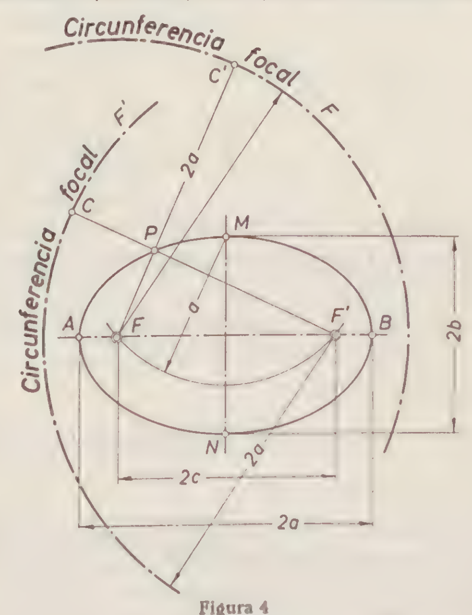


Figura 4

A esta circunferencia se la llama *circunferencia focal*. Si en lugar de prolongar el radio vector PF', prolongamos el PF y repetimos la construcción antedicha, obtendremos otra circunferencia de centro F y radio 2a. Por consiguiente, *toda elipse tiene siempre dos circunferencias focales.*

4.1 Volviendo a la figura 4, como por construcción es siempre PC = PF, en la que PF nos representa la distancia de P a F, y PC nos representa a su vez la distancia de P a la circunfencia focal de centro F' (ver ficha P. G. 2802, párrafo 1), podemos enunciar la siguiente importante propiedad:

El lugar geométrico de los puntos (P) *del plano que equidistan de una circun-*

ferencia (F') y de un punto interior de ésta (F), es una elipse cuyos focos son el centro de la circunferencia y el punto dados, y su eje mayor es el radio de dicha circunferencia.

5. Elipse.-Tangente y normal; propiedades.

Consideremos (fig. 5) trazada una elipse, sus ejes, sus focos y la circunferencia focal correspondiente a uno de sus focos. Tomemos un punto cualquiera P de la elipse, que uniremos con sus focos; prolonguemos uno de los radios vectores hasta que encuentre en C a la circunferencia focal.

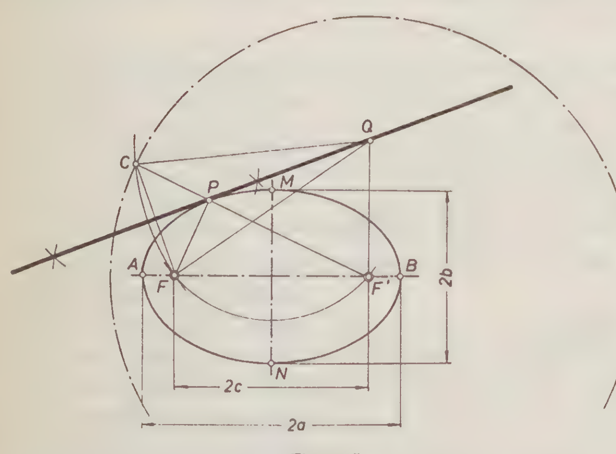


Figura 5

En virtud de lo demostrado en el párrafo 4, se verificará que PC = PF, lo cual nos indica que el punto P está sobre la mediatriz del segmento CF. Unamos C con F y tracemos la mediatriz al segmento CF que pasará por P. Tomemos sobre esta mediatriz otro punto cualquiera Q distinto de P, y unámoslo con los focos F, F' y con el punto C, formándose el triángulo QCF'.

Por una parte tenemos que PC = PF, y también por estar Q en la mediatriz de CF, que QC = QF; en el triángulo QCF' se verificará que

$$\mathbf{CF' < CQ + QF'} \qquad (1)$$

pero por ser CF' = PF + PF' y QC = QF, sustituyendo estos valores en (1) se verificará que

$$\mathbf{2a = PF + PF' < QF + QF'}$$

lo cual nos indica que para cualquier punto de la mediatriz PQ excepto el P, la suma de sus distancias a los focos es siempre mayor que el eje mayor de la elipse, es decir, que excepto el punto P todos los puntos de la mediatriz PQ son *exteriores* a la elipse (ver párrafo 3 de esta ficha). Esto nos indica que la mediatriz PQ solo tiene común con la elipse el punto P y por consiguiente dicha mediatriz es **tangente** a la elipse en P.

5.1 Como el triángulo CPF es isósceles, de base CF, la altura h_p correspondiente a P (ver ficha P. G. 2202, párrafo 3) será *mediatriz* de la base y al mismo tiempo *bisectriz* del ángulo CPF opuesto a ella; de aquí se deduce que

La tangente a la elipse por un punto P de ella es bisectriz del ángulo formado por uno de sus radios vectores correspondiente a P y por la prolongación del otro radio vector (fig. 6).

5.2 Por ser el ángulo FPF' (fig. 5) suplementario del CPF será la bisectriz del primero, perpendicular a la del segundo (ver ficha P. G. 2114, párrafo 1), y por consiguiente

La tangente a la elipse por un punto P de ella, es perpendicular a la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores correspondientes a dicho punto P (fig. 7).

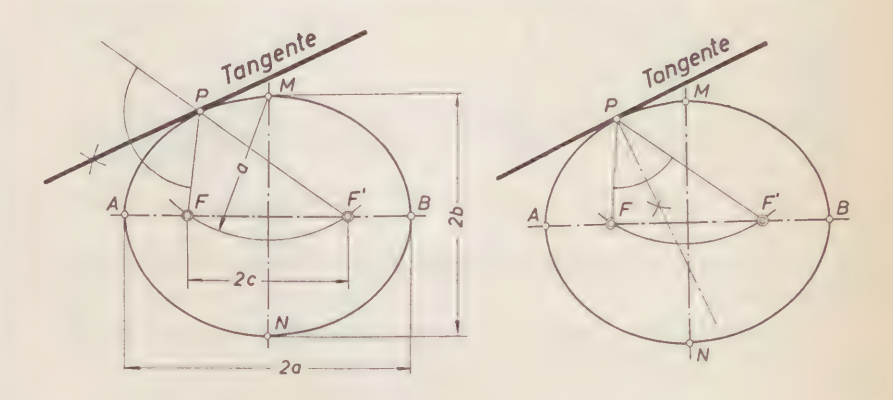


Figura 6

Figura 7

5.3 Por ser la bisectriz del ángulo FPF' (fig. 5) perpendicular a la tangente en el punto P, será a su vez la *normal* a la elipse en dicho punto P (ver ficha P. G. 2440, párrafo 3); por consiguiente

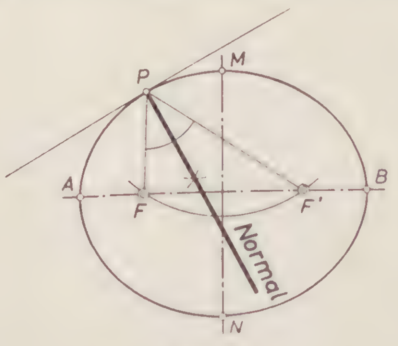


Figura 8

La normal a una elipse en un punto P de ella es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores correspondientes a dicho punto (fig. 8).

5.4 Por estar Q en la mediatriz a CF (figura 5) se verificará que CQ = QF, lo que nos indica que el punto C, a más de estar en la circunferencia focal, está también en la circunferencia de centro Q y radio QF por lo que será un punto de la intersección de ambas circunferencias. Esta propiedad nos sirve para el trazado de la tangente a la elipse por un punto exterior (ver ficha P. G. 2462).

5.5 En los vértices A y B de la elipse (fig. 5), los radios vectores correspondientes a ellos forman un ángulo nulo cuyos lados coinciden con el eje focal, luego

Las tangentes en los vértices de una elipse son perpendiculares al eje focal (fig. 9).

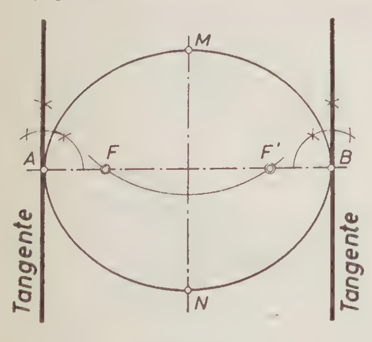


Figura 9

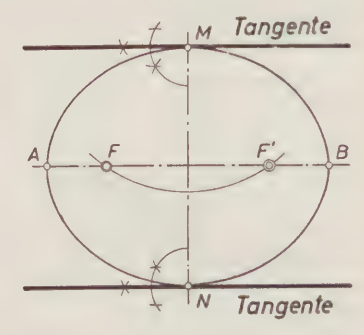


Figura 10

5.6 Por ser los ejes de una elipse perpendiculares entre sí (ver párrafo 3 de esta ficha).

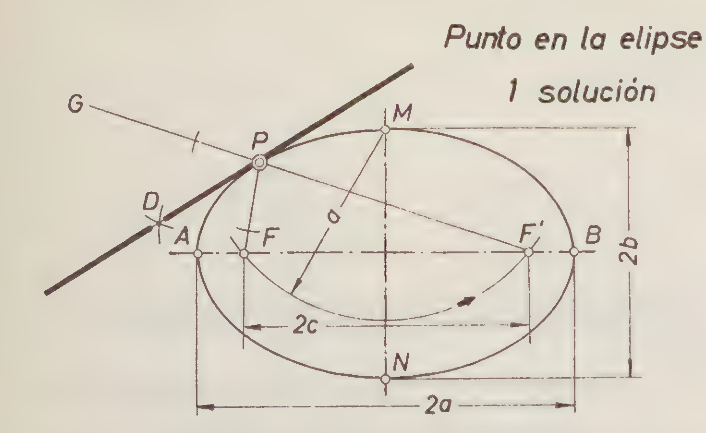
Las tangentes en los extremos del eje menor de una elipse serán paralelas al eje focal (fig. 10).

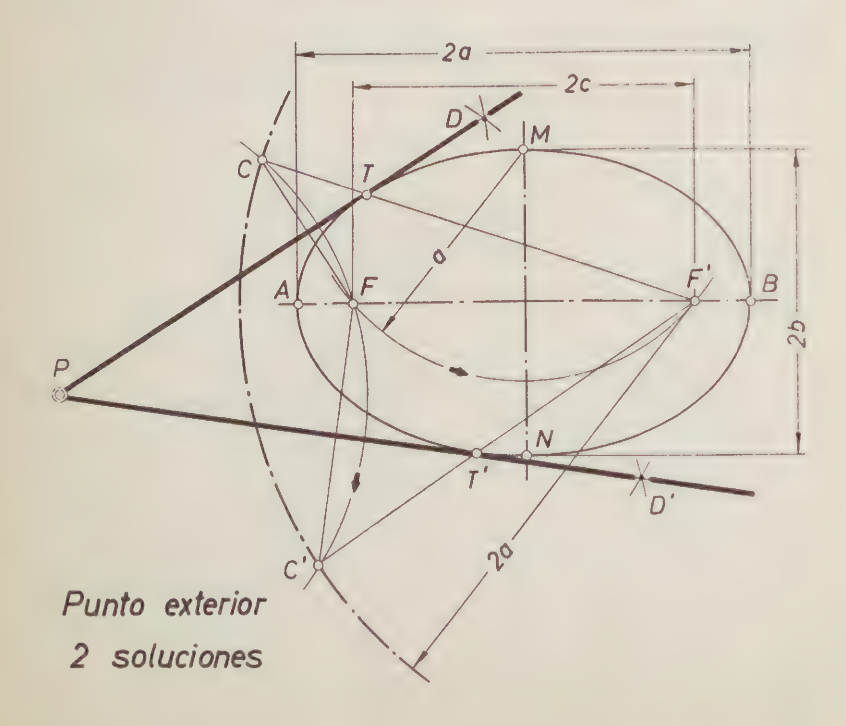
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Por un punto dado trazar una recta tangente a una elipse.

ENUNCIADO: *Por un punto dado trazar una recta tangente a una elipse.*





1. Generalidades.

Un punto con respecto a una elipse sólo puede ocupar en su plano las posiciones relativas siguientes:

1) Punto interior.

2) Punto en la elipse.

3) Punto exterior.

El problema planteado no tiene solución en el caso primero, ya que cualquier recta que pase por un punto interior de una elipse, la cortará en otro segundo punto y por consiguiente nunca puede ser tangente a ella.

En los restantes casos 2) y 3), el problema se resuelve como a continuación indicamos.

2. Resolución.

2.1 Punto en la elipse.

Sea la elipse de ejes **AB** (2a) y **MN** (2b), en la que determinaremos previamente sus focos **F** y **F'** (figura superior) trazando un arco de centro en **M** (o en **N**) y de radio **a** (ver ficha P. G. 2461, párrafo 3).

Supongamos un punto cualquiera **P** de la elipse por el cual debemos trazar la recta tangente a aquélla.

2.11 Trácense los radios vectores **PF** y **PF'** correspondientes a dicho punto (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.5), y prolónguese uno de ellos a partir de **P.**

2.12 Trácese la bisectriz del ángulo **GPF** formado por el primero y la prolongación del otro (ver ficha P. G. 2114).

2.13 Dicha bisectriz **DP** será la tangente pedida.

Este trazado es consecuencia de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 5.1, a la que remitimos al lector.

Obsérvese que es indiferente prolongar uno u otro de los radios vectores; en la figura ha sido prolongado el **PF'** y la bisectriz del ángulo **GPF** es la tangente pedida. Si hubiésemos procedido a la inversa, prolongando el radio vector **PF,** se nos habría formado el ángulo opuesto por el vértice al **GPF,** cuya bisectriz sería coincidente con la de éste (ver ficha P. G. 2114, párrafo 1).

Obsérvese también que este trazado no requiere la representación previa de la elipse; si ésta ha sido definida por sus elementos fundamentales, ejes y distancia focal (véase ficha P. G. 2461, párrafo 1), y conocemos tan sólo la posición del punto de tangencia, el cual ha de cumplir la condición de ser **PF + PF' = 2a,** se puede determinar previamente la recta tangente sin tener trazada la elipse.

2.2 Punto exterior.

La tangente a una elipse que pase por un punto exterior a ésta, quedará perfectamente determinada cuando conozcamos otro punto **D** de ella. Para obtenerlo efectuemos la siguiente construcción, suponiendo previamente conocidos los ejes de la elipse, la posición de sus focos según se ha indicado en el párrafo 2.1, así como la situación del punto **P** dado (figura inferior).

2.21 Con radio **2a** y centro en uno de los focos **F',** trácese la circunferencia focal correspondiente a este foco (ver ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 4).

2.22 Con radio **PF** (distancia de **P** al otro foco **F**), y centro en **P** trácese un arco que cortará a la circunferencia focal en **C.**

2.23 La mediatriz del segmento **CF** será la tangente pedida (ver ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 5). Como ya se conoce un punto **P** de ella, basta determinar otro cualquiera **D** aplicando el trazado dado en la ficha P. G. 2131

La circunferencia trazada según 2.22 cortará a la circunferencia focal en otro segundo punto **C',** y también la mediatriz del segmento **C'F** será tangente a la elipse, por lo que el problema tendrá siempre *dos soluciones.*

El punto de tangencia **T** (o el **T'**) se obtiene por intersección de la recta **CF'** (o la **C'F'**) con la tangente **PD** (o la **PD'**) trazada anteriormente.

Obsérvese en este trazado que, tanto para la determinación de las tangentes, como para la obtención de los puntos de contacto, no se requiere la representación previa de la elipse, sino conocer tan sólo sus ejes y la posición del punto **P'** el cual ha de cumplir la condición de ser **PF + PF' > 2a,** para que el punto sea *exterior* a aquélla (ver ficha P. G. 2460, párrafo 3).

Este trazado es consecuencia de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 5.4, a la que remitimos al lector.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PARÁBOLA.-Directriz. Eje.

Relaciones métricas fundamentales

PARÁBOLA

1. Generalidades.

La *parábola* es una de las curvas obtenidas de la sección de una superficie cónica de revolución por un plano. En la ficha P. G. 2450, hojas 1 a 3, hemos detallado las diversas curvas que se obtienen en las distintas posiciones del plano secante, y estudiado en el párrafo 3.3 de la hoja 2 la sección obtenida cuando el plano secante es paralelo a una de las generatrices de la mencionada superficie cónica de revolución; a esta curva la hemos denominado *parábola.*

También se ha visto que para que se produzca una sección parabólica es necesario que el ángulo β que forma el plano π secante con el eje de la superficie cónica, ha de ser igual al ángulo α formado por la generatriz con su eje ($\beta = \alpha$); las figuras 9 y 10 de dicha ficha representan la parábola sección en perspectiva y proyección respectivamente.

En el párrafo 3.6 de la mencionada ficha, hemos visto también que la parábola (curva abierta de una rama) puede considerarse geométricamente como curva de transición (curva límite) entre la elipse (curva cerrada) y la hipérbola (curva abierta de dos ramas). Cuando se verifique que $\beta > \alpha$ la curva será elipse, y cuando sea $\beta < \alpha$ la curva será hipérbola; en la posición límite en que $\beta = \alpha$ la curva será una parábola.

El estudio de las propiedades de la parábola puede establecerse por analogía con las de la elipse o hipérbola, viendo las que se conservan de una u otra en el paso al límite.

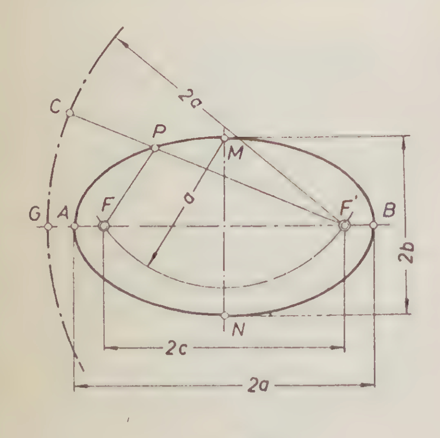


Figura 1

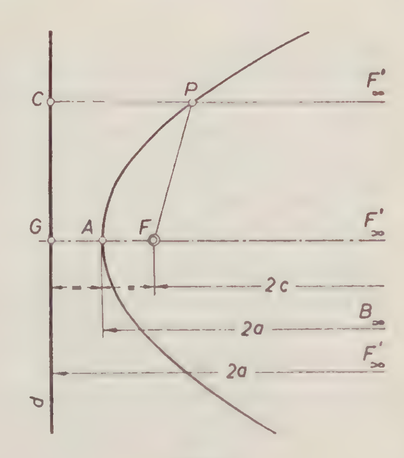


Figura 2

2. Parábola.-Directriz. Eje. Relaciones métricas fundamentales.

Si consideramos que el plano secante produce una sección elíptica ($\beta > \alpha$) y hacemos decrecer de forma continua el ángulo β hasta llegar

a igualar al α, observaremos que el eje mayor **2a** y la distancia focal **2c** de la elipse (ver ficha P. G. 2460, párrafo 3), van aumentando progresivamente a medida que el ángulo β disminuye, hasta hacerse infinitamente grandes en el límite $\beta = \alpha$ (figuras 1 y 2).

El radia **2a** de la circunferencia focal (ver ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 4), correspondiente al foco F' que se traslada hacia el infinito, va

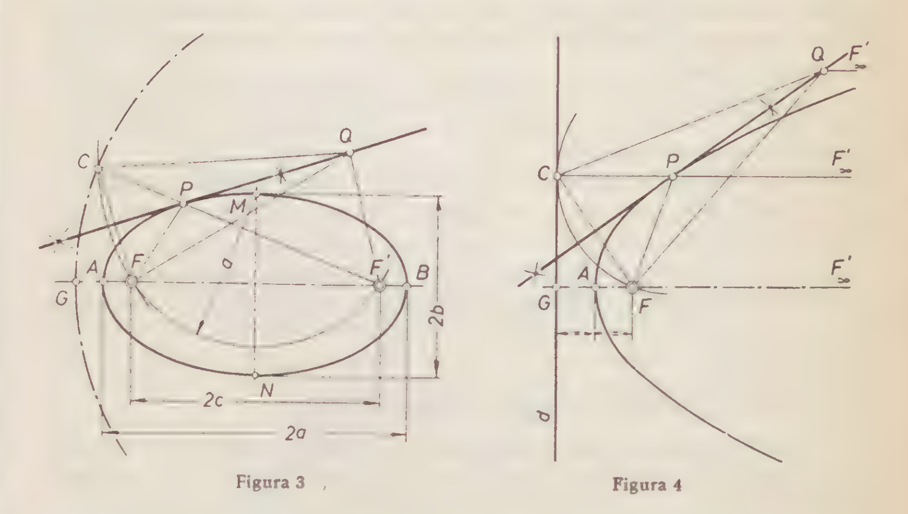


Figura 3 Figura 4

creciendo continuamente, y por consiguiente disminuye la curvatura de dicha circunferencia (ver ficha P. G. 2440, hoja 3, párrafo 5.18) hasta anularse en el paso al límite, por lo que la mencionada circunferencia focal se transforma en una línea recta **d.**

Así pues, la parábola tiene un solo foco F (el otro F' es impropio) y un solo vértice A (el B es también impropio), un eje focal que pasa por el foco F y es eje de simetría de la curva, y una circunferencia focal correspondiente al foco F' impropio que se transforma en una recta perpendicular al eje focal (la circunferencia focal correspondiente al foco propio F es una recta impropia).

2.1 Tomemos un punto cualquiera P de una elipse (fig. 1) y tracemos los radios vectores PF, PF' correspondientes a este punto. Efectuando reiteradamente la construcción indicada en la ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 4, es decir, prolongar el radio vector PF' a partir de P la magnitud PC, obtendremos puntos de la circunferencia focal correspondiente al foco F'.

Haciendo esta misma operación en el paso al límite, parábola (fig. 2), cuando el foco F' se haga impropio, observaremos que el radio vector PF' se transforma en una recta paralela al eje focal, y el punto C en un punto de una recta **d** perpendicular al eje focal que, como acabamos de ver, es la transformada de la circunferencia focal correspondiente al foco

impropio F'; siendo pues PC perpendicular a **d**, será PC la distancia de P a **d**.

2.2 En virtud de la construcción anterior, se verifica para cualquier punto P de la parábola que PC = PF, siendo PC la distancia de P a **d**, y PF la distancia de P a F. Por consiguiente, se verificará la relación PF : PC = 1, y teniendo en cuenta la definición de excentricidad dada en el párrafo 5 de la ficha P. G. 2450, hoja 3, vemos que la recta **d** coincide con la directriz de la parábola según la definición de directriz dada en el párrafo 4.4 de la mencionada ficha.

Así pues, la propiedad enunciada en el párrafo 4.1 de la ficha P. G. 2460, hoja 2, seguirá siendo válida para la parábola, dando lugar al siguiente enunciado explícito:

El lugar geométrico de los puntos (P) *del plano que equidistan de una recta* (d) *y de un punto exterior a ella* (F) *es una parábola, cuya directriz y foco son respectivamente la recta y punto dados.*

Esta propiedad suele darse como definición de «parábola» en las exposiciones elementales de las curvas de segundo grado, con independencia de la obtención de dicha curva como sección cónica, tal como la hemos obtenido.

3. Parábola.-Tangente y normal; propiedades.

Las propiedades de la tangente a la elipse, estudiadas en el párrafo 5 de la ficha P. G. 2460, hoja 2, correspondientes con la figura 5 de di-

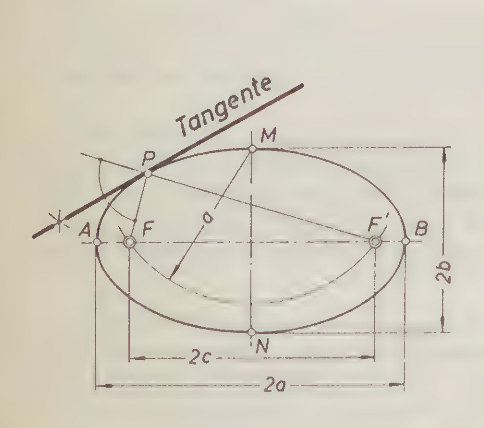


Figura 5

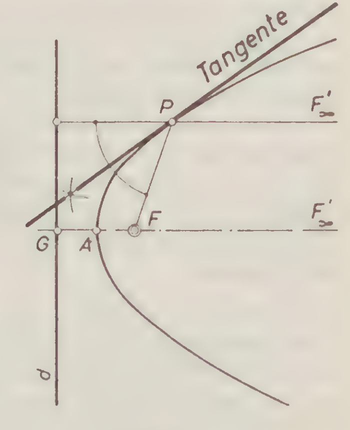


Figura 6

cha ficha, son extensivas a la parábola, con ligeras modificaciones de expresión y de trazado en este paso al límite.

En la figura 3 reproducimos la anteriormente mencionada figura para la elipse, y en la figura 4, la correspondiente a la parábola.

PARÁBOLA

(continuación)

3.1 La propiedad enunciada en el párrafo 5.1 de la mencionada ficha P. G. 2460, hoja 2 (fig. 5), se hace extensiva a la parábola, dando lugar al siguiente enunciado:

La tangente a una parábola por un punto P de ella, es bisectriz del ángulo formado por uno de sus radios vectores y la prolongación del otro (fig. 6).

3.2 Análogamente, la propiedad enunciada en el párrafo 5.2 de la ficha P. G. 2460, hoja 2 (fig. 7), se aplica a la parábola con el siguiente enunciado:

La tangente a la parábola en un punto P de ella, es perpendicular a la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores correspondientes a dicho punto P (fig, 8).

3.3 La propiedad 5.3 de la mencionada ficha P. G. 2460, hoja 2 (fig. 9) se hace extensiva a la parábola con el siguiente enunciado:

La normal a la parábola en un punto P de ella, es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores correspondientes a dicho punto (fig. 10).

3.4 Finalmente, la propiedad enunciada en el párrafo 5.4 de la ficha P. G. 2460, hoja 2 (fig. 3), de estar situado el punto C simultáneamente en la circunferencia focal y en la trazada con centro Q y radio QF, se verifica también en la parábola, en la que la circunferencia focal de la elipse se transforma en la directriz **d** de la mencionada parábola.

Esta propiedad se aplica en el trazado de la tangente a la parábola por un punto exterior a ella.

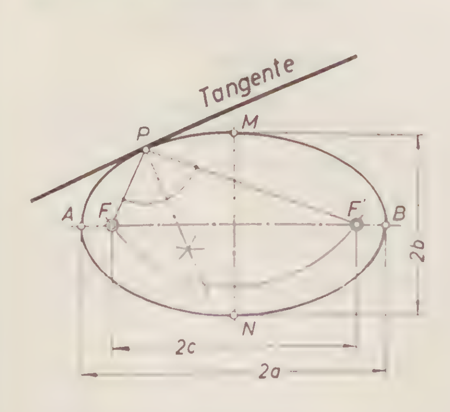


Figura 7

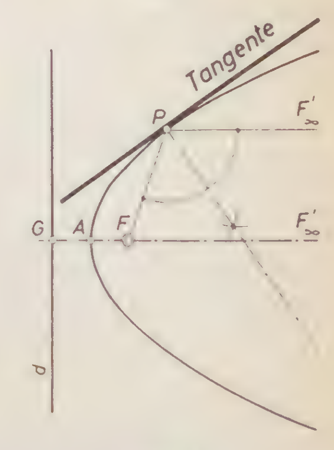


Figura 8

3.5 El vértice A de la parábola (fig. 11) es un punto singular que tiene la propiedad general de equidistar del foco y de la directriz, y se halla situado en el eje focal perpendicular a la directriz; por consiguiente, A será el punto

medio del segmento FG. La tangente en el vértice será perpendicular al eje focal, ya que los radios vectores correspondientes a dicho punto A forman un ángulo nulo de lados coincidentes con el mencionado eje focal.

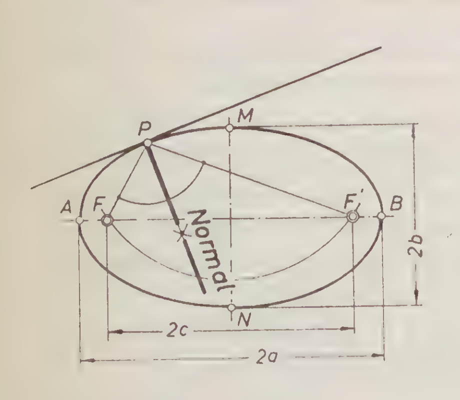


Figura 9

Figura 10

4. Parábola.-Subtangente y subnormal; propiedades.

Sea (fig. 12) una parábola de directriz **d** foco **F.** Tomemos un punto P cualquiera de la curva y tracemos por él la tangente y la normal, que cortarán al eje focal en los puntos B y C. Tracemos también por P una perpendicular al eje focal, siendo D el pie de la misma.

Al segmento BD, proyección del segmento de tangente BP sobre el eje focal, se le llama *subtangente*. Al segmento DC, proyección del segmento de normal PC sobre el eje focal, se le llama *subnormal.*

4.1 Unamos ahora el punto P con el foco F y tracemos también por P la perpendicular a la directriz, cuyo pie será el punto E. Por ser P un punto de la parábola, equidistará del foco y de la directriz (ver párrafo 2.2 de esta ficha), y por consiguiente tendremos

$$\mathbf{PE = PF} \qquad (1)$$

Unamos a continuación los puntos E y F, formándose el triángulo isósceles (PE = PF) **PEF.** La altura PH de este triángulo será mediatriz de la base y al mismo tiempo bisectriz del ángulo EPF opuesto a ella, por lo que coincidirá con la tangente a la parábola trazada por P (ver párrafo 3.1 de esta ficha). Finalmente unamos E con B, formándose el triángulo BEF que

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

también será isósceles (B equidista de E y F por pertenecer a la mediatriz a EF), verificándose que

$$BE = BF \qquad (2)$$

Por otra parte los ángulos EPB y PBA, son iguales (por ser alternos internos entre las paralelas EP y BA, cortadas por la secante PB), de lo cual se deduce que los triángulos rectángulos EHP y BHF que tienen los catetos EH y HF iguales y también dos ángulos agudos (EPB = PBA), serán iguales entre sí. De la igualdad de estos triángulos deducimos que

$$PE = BF \qquad (3)$$

Comparando las igualdades 1), 2) y 3), llegamos a la conclusión de que

$$PE = PF = BE = BF \qquad (4)$$

lo cual nos demuestra que el cuadrilátero BEPF es siempre un *rombo*, en el cual se verificará la conocida propiedad de cortarse sus diagonales perpendicularmente en sus respectivos puntos medios, es decir que siempre tendremos EH = HF, y que BH = HP, cualquiera que sea la posición del punto P.

Si proyectamos ahora el centro H de este rombo sobre el eje focal, obtendremos el punto A, que por ser H el punto medio de EF será a su vez A el punto medio de su proyección GF, lo cual nos demuestra que es el vértice de la parábola; pero al mismo tiempo, por ser H a su vez punto

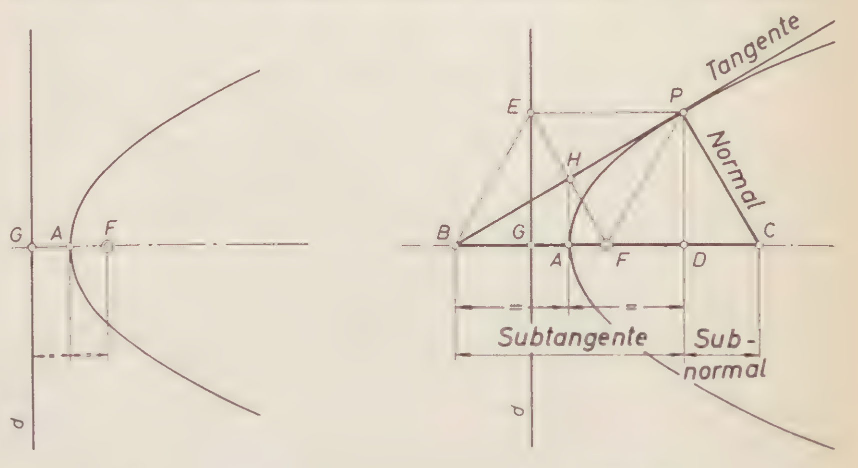


Figura 11 — Figura 12

medio de la tangente BP será también A punto medio de su proyección BD, es decir, de la *subtangente*. Como consecuencia podemos enunciar la siguiente importante propiedad:

El vértice de la parábola divide a la subtangente de cualquier punto de ella, en dos partes iguales.

Esta propiedad permite obtener la posición de la directriz y foco de una parábola, y por consiguiente su trazado, cuando se conocen como datos de ella una cuerda y su flecha, problema que se presenta con mucha frecuencia en diversas aplicaciones técnicas (líneas aéreas de transporte de energía eléctrica, puentes colgantes, curvas de momentos de flexión, etc.). Su resolución y trazado lo haremos en su ficha correspondiente.

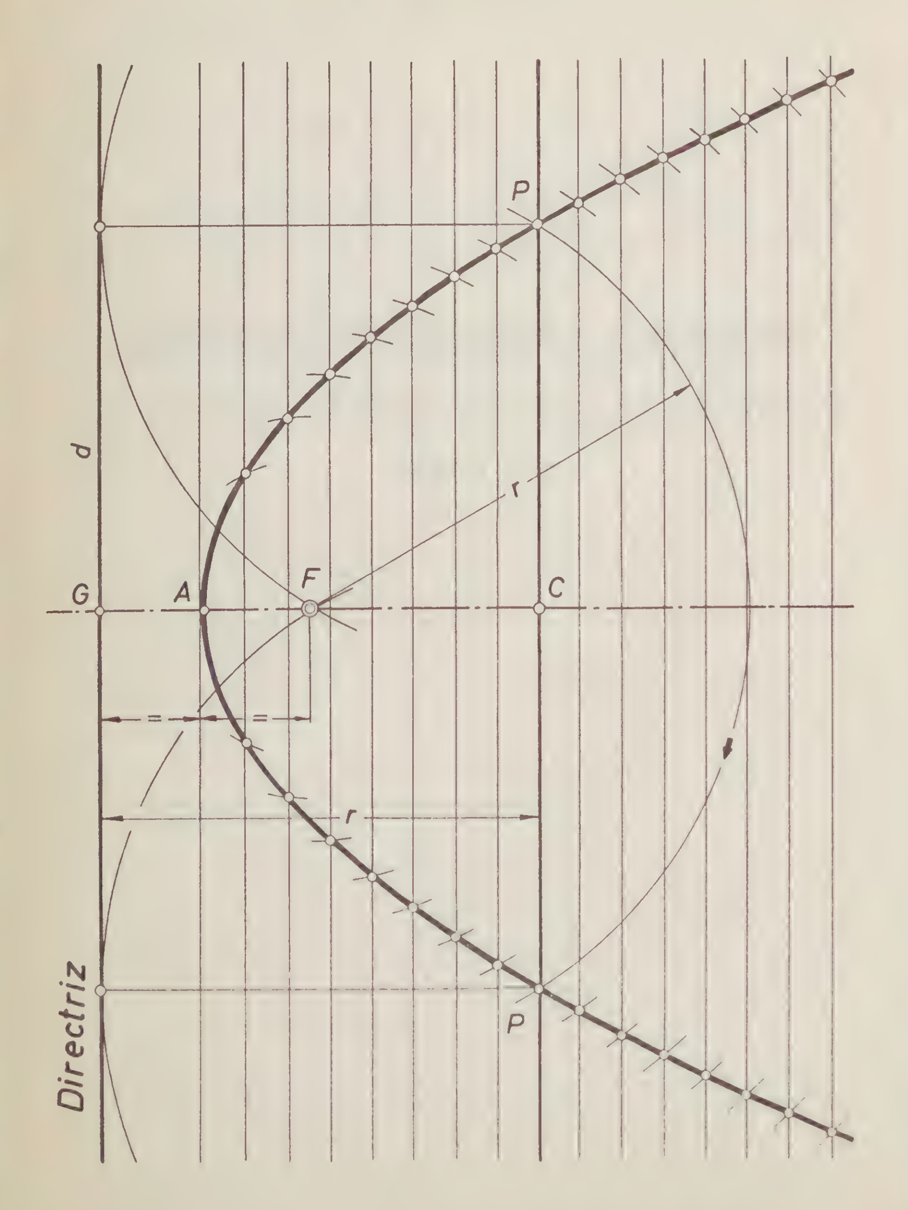
4.2 Volviendo a la figura 12, comparemos ahora los triángulos rectángulos EGF y PDC, que tienen los catetos EG y PD iguales (por ser lados opuestos del paralelógramo rectángulo EPDG), y los ángulos agudos GEF y DPC también iguales (por tener sus lados paralelos y del mismo sentido), de lo que se deduce que dichos triángulos serán iguales, y por consiguiente se verificará que GF = DC, lo cual nos indica que

La subnormal de cualquier punto de la parábola tiene siempre longitud constante, igual a la distancia que hay entre el foco y la directriz.

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una parábola dada su directriz y su foco.

ENUNCIADO: *Construir una parábola dada su directriz y su foco.*



1. Generalidades.

En la ficha P. G. 2450, hojas 1 a 3, hemos estudiado las curvas cónicas de revolución. Cuando el plano secante es paralelo a una generatriz de dicha superficie, la curva sección la hemos denominado «parábola».

En la ficha P. G. 2451 hemos estudiado a su vez el procedimiento general para construir una cónica cualquiera cuando se conoce su excentricidad, y que es aplicable naturalmente a la parábola como caso particular; este procedimiento general se simplifica para esta curva, cuya excentricidad es $\varepsilon = 1$.

Las propiedades particulares de la parábola, estudiadas en la ficha P. G. 2480, hojas 1 y 2, permiten construir esta curva con otros datos distintos de la excentricidad. El caso más frecuente, y de mayor aplicación en la técnica, se presenta cuando los datos son la directriz **d** y su foco **F**, que resolvemos a continuación.

2. Resolución.

Sea **d** la directriz y **F** el foco de la parábola.

2.1 Tracemos por **F** una perpendicular a **d** (ver ficha P. G. 2133) que cortará en **G** a la directriz. La recta **FG** será el eje focal de la parábola y a su vez eje de simetría de ella; el punto medio **A** de **FG** será el vértice.

2.2 Tomemos un punto cualquiera **C** del eje focal a partir de **A** hacia **F**, y tracemos por él una paralela a la directriz **d** (con las escuadras). **CG** nos medirá la distancia entre ambas paralelas.

2.3 Con centro en **F** y radio **CG** tracemos un arco, que cortará en **P** y **P'** a la paralela trazada según 2.2. Estos dos puntos pertenecerán a la parábola.

Repitiendo esta operación con otros puntos del eje focal obtendremos tantos puntos de la curva como se deseen.

Es conveniente, pero no necesario, trazar previamente una serie de paralelas a la directriz, equidistantes entre sí, a partir del vértice **A** hacia el foco **F**, y tomar sucesiva y ordenamente con el compás, las distancias de estas paralelas al punto **G**.

3. Demostración.

3.1 Los puntos **P** y **P'** por pertenecer a una circunferencia de centro en **F** y radio **CG**, equidistan de **F** la magnitud **CG** (ver ficha P. G. 2802, l. g. n.° 1).

3.2 Por otra parte, dichos puntos **P** y **P'**, por pertenecer a una paralela a la directriz a la distancia **CG**, también equidistarán de ella dicha magnitud (ver ficha P. G. 2804, l. g. n.° 11).

3.3 Por consiguiente, y en virtud de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2480, párrafo 2.2, los puntos **P** y **P'** pertenecen a la parábola de directriz **d** y foco **F**.

4. Aplicaciones.

En la técnica es frecuente también tener que dibujar una parábola teniendo como datos la distancia del vértice a una cuerda perpendicular al eje focal (flecha), y la magnitud de dicha cuerda.

Con estos datos es posible el trazado directo de la parábola por procedimiento que estudiaremos en otra ficha. No obstante, y basándonos en las propiedades estudiadas y demostradas en la ficha P. G. 2480, hoja 2, es posible determinar el foco y la directriz, con lo cual podemos utilizar posteriormente el procedimiento estudiado en esta ficha.

Su trazado es el siguiente: Sean (fig. 1) **AD** la flecha dada y **PP'** la cuerda.

Figura 1

4.1 Sobre una recta indefinida que suponemos sea el eje focal de la parábola, tomaremos el segmento **AD** igual a la fecha dada; por su extremo **D,** perpendicularmente al eje focal, marquemos a continuación los puntos **P** y **P'** equidistantes de **D** y con la longitud de la cuerda (que se bisecará previamente).

4.2 Tomemos sobre el eje focal, a partir de **A** y en dirección opuesta a **D** el segmento **BA** igual al **AD,** que uniremos con **P.** La recta **BP** será tangente a la parábola (ver ficha P. G. 2480, hoja 2, párrafo 4.1).

4.3 Tracemos la recta **PC** paralela al eje focal, que formará con la tangente en **P** el ángulo **CPB.**

4.4 Construyamos el ángulo **BPF** igual al anterior y contiguo a él. El lado **PF** cortará al eje focal en el punto **F** que será el foco de la parábola (ver ficha P. G. 2480, párrafo 3).

4.5 Para obtener el punto **G** donde la directriz **d** corta al eje focal, bastará tomar **GA** = **AF** (ver ficha P. G. 2480, párrafo 2.2), con lo cual podemos trazar dicha directriz perpendicular al eje focal.

Obsérvese que para efectuar las construcciones anteriores no es preciso tener dibujada la parábola pues bastan para ello los datos prefijados.

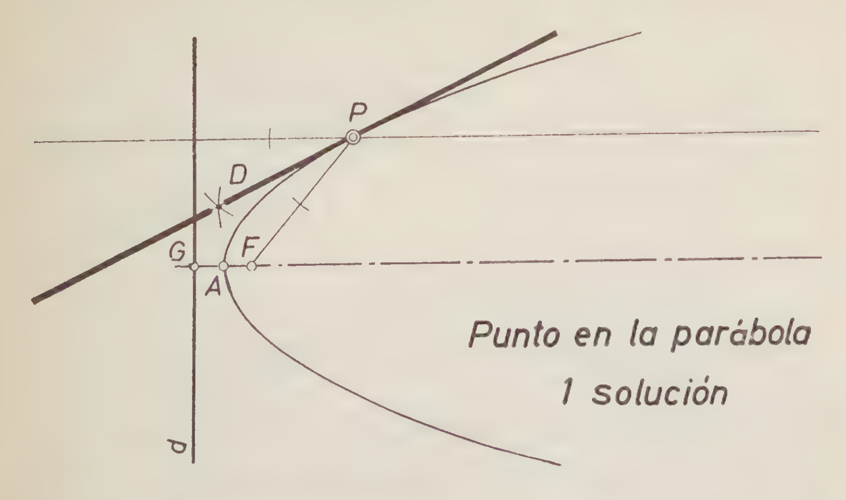
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

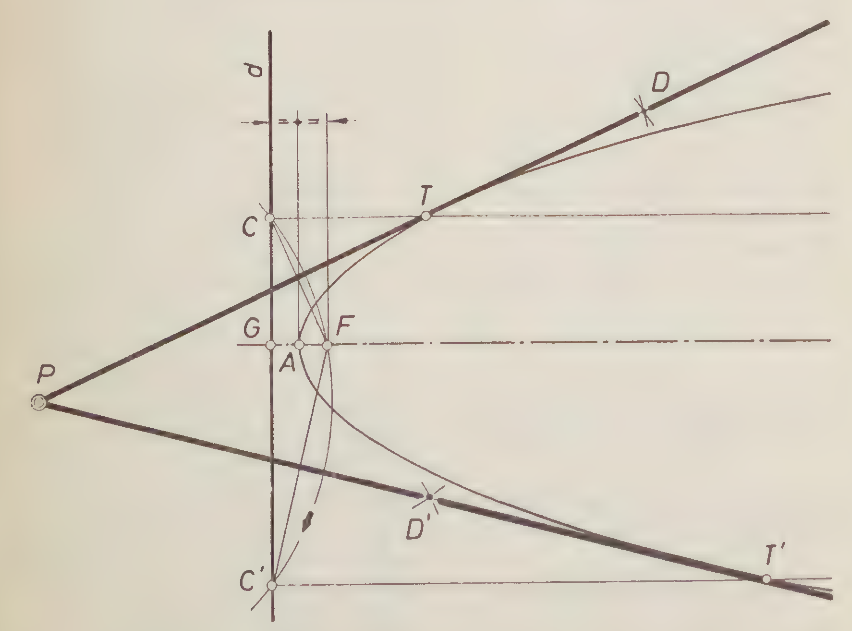
PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Por un punto dado trazar una recta tangente a una parábola.

Ficha n.º 85	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2482

ENUNCIADO: *Por un punto dado trazar una recta tangente a una parábola.*





1. Generalidades.

En el estudio general de las secciones cónicas que hemos efectuado en la ficha P. G. 2450, hojas 1 a 3, hemos denominado «parábola» a la sección obtenida cuando el plano secante es paralelo a una de las generatrices de la superficie cónica de revolución.

La propiedad fundamental de la parábola de ser el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta y de un punto exterior a ella, estudiada en la ficha P. G. 2480, párrafo 2.2, nos permite localizar cualquier punto del plano perteneciente a la parábola.

Si llamamos d_F a la distancia de un punto cualquiera del plano al punto exterior a la recta (foco), y d_D a la que hay desde dicho punto a la recta (directriz), todo punto del plano que cumpla la condición de ser $d_F = d_D$, pertenecerá a la parábola.

Si se verifica que $d_F < d_D$ se dice que el punto es *interior* a la parábola; si por el contrario se verifica que $d_F > d_D$ se dice que el punto es *exterior*.

En resumen, un punto del plano de una parábola solo puede ocupar con respecto a ésta, las posiciones relativas siguientes:

1.° Punto interior.

2.° Punto en la parábola.

3.° Punto exterior.

El problema planteado no tiene solución en el caso primero, ya que cualquier recta que pase por un punto interior a la parábola, excepto el eje focal, la corta en dos puntos, y por consiguiente nunca puede ser tangente a ella.

En los restantes casos 2) y 3), el problema se resuelve como a continuación indicamos.

2. Resolución.

2.1 Punto en la parábola.

Sea la parábola de directriz d y foco F. Supongamos un punto cualquiera P de dicha parábola, por el cual ha de trazarse la recta tangente.

2.11 Trácense los radios vectores PF y PF' correspondientes a dicho punto (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.5); la recta PF' será pues paralela al eje focal.

2.12 Trácese la bisectriz del ángulo CPF formado por el primero y la prolongación del segundo (ver ficha P. G. 2114).

2.13 Dicha bisectriz DP será la tangente pedida.

Este trazado es consecuencia de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2480, párrato 3.1, a la que remitimos al lector.

Obsérvese que es indiferente prolongar uno u otro de los radios vectores; en la figura ha sido prolongado el PF' (paralelo al eje focal), y la

HIPÉRBOLA

En la ficha P. G. 2450, hoja 1 a 3 hemos estudiado las secciones cónicas en general y algunas de sus propiedades comunes a todas ellas. En esta ficha vamos a ampliar y estudiar nuevas definiciones y propiedades referentes exclusivamente a la sección hiperbólica. Esta curva se obtiene, según vimos en el párrafo 3.4 de la ficha P. G. 2450, hoja 2 (figuras 11 y 12), cuando se cumple la relación $\beta < \alpha < 90^o$.

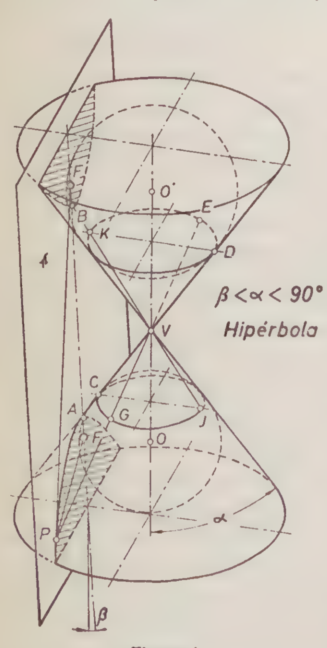


Figura 1

2. Hipérbola.-Teorema de Dandelin.

Sea (fig. 1) π el plano secante que produce una sección hiperbólica en la superficie cónica de revolución de vértice **V** (ver ficha P. G. 2450, hoja 2, párrafo 3.4). Sean **F** y **F'** los focos de la hipérbola, y **A** y **B** los vértices de la misma (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafos 4.1 y 4.3); los puntos **F, A, B, F'** estarán sobre el eje focal de la hipérbola. Sean también **O** y **O'** los centros de las esferas inscritas en la superficie cónica y tangentes al plano cuyos puntos de contacto con éste son los focos **F** y **F'**.

Consideremos ahora un punto cualquiera **P** de la hipérbola, que uniremos con los focos **F** y **F'**; los segmentos **PF** y **PF'** son los radios vectores correspondientes al punto **P** (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.5). Unamos a continuación el punto **P** con el vértice **V** de la superficie cónica; la recta **PV** será una generatriz de dicha superficie cónica y cortará a las circunferencias de contacto de las esferas **O** y **O'** en los puntos **G** y **E** respectivamente.

Comparando ahora los segmentos **PF** y **PG**, vemos que son iguales entre sí, ya que ambos son tangentes a la esfera **O** trazadas desde el punto exterior **P**; igualmente son iguales los segmentos **PF'** y **PE** con respecto a la esfera **O'**. Por consiguiente tendremos:

$$PF = PG$$
$$PF' = PE$$

de donde

$$PF' - PF = PE - PG = GE = \text{constante}$$

ya que **GE**, segmento de generatriz comprendido entre las dos circunferencias de contacto de las esferas inscritas, tiene una longitud constante cualquiera que sea la posición del punto **P**.

Esta importante propiedad de la hipérbola que acabamos de deducir, se conoce con el nombre de «Teorema de Dandelin».

3. Hipérbola.-Ejes: relaciones métricas.

La propiedad enunciada en el Teorema de Dandelin se suele dar como definición de «hipérbola» en las exposiciones elementales de las curvas de segundo grado, con independencia de la obtención de dicha curva como sección cónica, tal como la hemos estudiado.

Es clásica la siguiente definición:

Se denomina hipérbola a la curva *lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos situados en el mismo, es constante y menor que la distancia entre dichos puntos.*

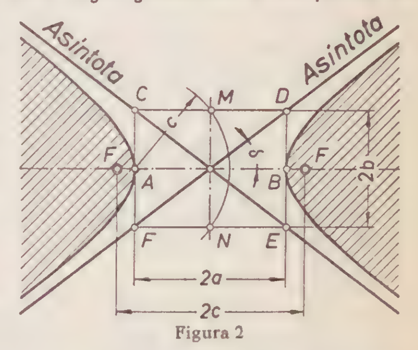


Figura 2

Partiendo de esta propiedad métrica, se deducen otras generales que sirven de base tanto para su trazado como para la obtención de sus tangentes.

Consideremos de nuevo la figura 1, en la que **A** y **B** son los vértices de la hipérbola (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.3) y aplicando a ellos el teorema de Dandelin, se verificará que AF' — AF = BF — BF', y siendo AF' = FF' — AF y BF = FF' — BF' tendremos, sustituyendo valores, que FF' — AF — AF = FF' — BF', — BF', de donde se deduce que FF' — 2AF = FF' — 2BF', y por consiguiente

$$\mathbf{AF = BF'} \qquad (1)$$

y de ésta

$$\mathbf{AF' - AF = AF' - BF' = AB = constante} \qquad (2)$$

es decir, que la *distancia* AB *entre los vértices de una hipérbola es igual a la diferencia de distancias de cualquiera de sus puntos a los focos.*

A la distancia AB se le denomina *eje principal* de la hipérbola y se la suele designar por **2a;** a la distancia FF' entre los focos de la hipérbola se la denomina *distancia focal* y se la suele designar por **2c.**

Sea (fig. 2) AB el eje principal de una hipérbola, y FF' su distancia focal. Tomemos el punto medio O de AB, que será a su vez centro de FF' (por ser, según (1) AF = BF') y tracemos por O la mediatriz AB. Con centro en uno de los vértices de la hipérbola (A o B) y radio la semidistancia focal **c** (**c** > **a**), tracemos un arco que cortará a la mediatriz en los puntos M y N, por lo que será O el punto medio de MN. A la distancia MN se le llama *eje transverso* de la hipérbola, y se la suele designar por **2b.**

Los segmentos **a, b** y **c** son los lados de un triángulo rectángulo AOM de catetos **a** y **b,** y de hipotenusa **c,** existiendo entre ellos la relación

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2} \qquad (3)$$

Los ejes de una hipérbola son *ejes de simetría* de dicha curva y perpendiculares entre sí. El punto **O** de su intersección es el *centro* de la misma.

Tracemos a continuación, por los extremos **A** y **B** del eje principal, y por los **M** y **N** del eje transverso, paralelas al otro eje respectivo, cuyas mutuas intersecciones nos formarán el paralelógramo rectángulo **CDEF.** Las diagonales **CE** y **DE** de este rectángulo son *rectas tangentes a la hipérbola en puntos infinitamente distantes de sus vértices*, recibiendo por este motivo el nombre de *asíntotas.*

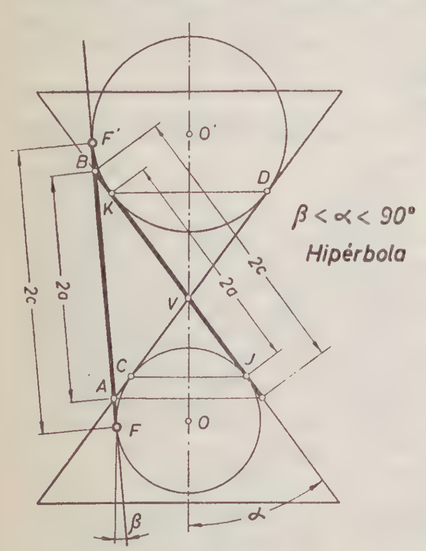


Figura 3

Todo punto del plano de una hipérbola, cuya diferencia de distancias a los focos de la misma sea *mayor que el eje principal,* es *interior* a la curva, y pertenecerá a la zona rayada de la figura.

Todo punto del plano de una hipérbola, cuya diferencia de distancias a los focos de la misma sea *menor que el eje principal* es *exterior* a la curva, y no pertenecerá a la zona rayada de la figura.

Finalmente indicaremos que, según se demuestra en Geometría racional, la excentricidad definida de forma general para una cónica cualquiera en el párrafo 5 de la ficha P. G. 2450, hoja 3, como relación constante entre los cosenos de los ángulos β y α que forman con el eje de la superficie cónica el plano π secante, y la generatriz de dicha superficie, y que según vimos en el párrafo 5.3 de dicha ficha, es *mayor que uno* en la hipérbola, coincide en esta curva con la relación existente entre la semidistancia focal y el semieje principal. Es decir, que en la hipérbola se verifica:

$$\varepsilon = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{c}{a} > 1 \qquad (4)$$

Cuando los ejes principal y transverso son iguales, la hipérbola se llama *equilátera.* El rectángulo **CDEF** se tranforma en un cuadrado, y las asíntotas forman ángulos de 45° con ambos ejes.

En la figura 3, proyección ortogonal de la figura 1 sobre un plano perpendicular a π, representamos gráficamente las relaciones métricas deducidas, haciendo observar en ella que los segmentos **AF** y **AC** son iguales, por ser tangentes desde **A** a la esfera de centro **O,** y lo mismo ocurre con los **BF'** y **BK.**

Para el estudio de las analogías entre la hipérbola y la elipse, compárese el desarrollo del texto y figuras de esta ficha con los de la P. G. 2460.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

HIPÉRBOLA

(continuación)

4. Hipérbola.-Circunferencia focal; propiedades.

Sea (fig. 4) una hipérbola de eje principal AB y de focos F y F'.

Tomemos un punto P cualquiera de la hipérbola,* y tracemos los radios vectores PF y PF' (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.5); restemos a uno de los radios vectores (el PF' p. e.) el otro radio vector (el PF), para lo cual trazaremos el arco FC de centro en P y radio PF; su intersección con PF' nos determinará el punto C. En virtud de los demostrado en la ficha P. G. 2500, párrafos 2 y 3, se verificará:

$$\mathbf{AB = PF' - PF = PF' - PC = 2a = constante}$$

es decir, que cualquiera que sea la posición del punto P, al efectuar la construcción expuesta anteriormente, el punto C estará siempre a una distancia

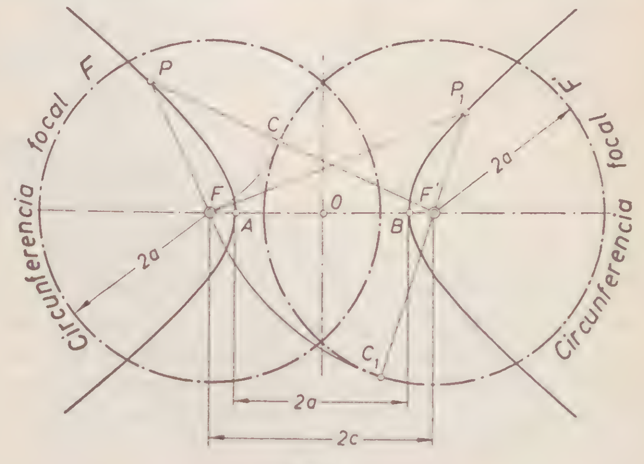


Figura 4

constante del foco F' igual al eje principal de la hipérbola, y por lo tanto, el l. g. de las posiciones del punto C será una circunferencia de centro F y radio **2a.**

A esta circunferencia se la llama *circunferencia focal.* Si en lugar de hallar la diferencia de los radios vectores sobre el radio PF', lo hacemos

* El punto P lo hemos supuesto situado en la rama de hipérbola de foco F, pero el razonamiento expuesto seguiría siendo válido si el punto (P_1 en la figura) estuviese en la otra rama de foco F' (C_1 en la figura); basta sustituir P y C por P_1 y C_1, respectivamente).

sobre el radio PF, obtendremos otra circunferencia de centro en F y radio **2a.** Por consiguiente, *toda hipérbola tiene siempre dos circunferencias focales.*

4.1 Volviendo a la figura 4, como por construcción es siempre PC = PF, en la que PF nos representa la distancia de P a F, y PC nos representa a su vez la distancia de P a la circunferencia focal de centro F' (ver ficha P. G. 2802, párrafo 1), podemos enunciar la siguiente importante propiedad:

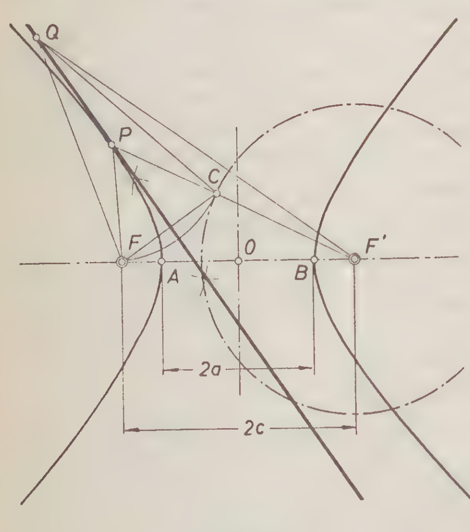


Figura 5

El lugar geométrico de los puntos (P) del plano que equidistan de una circunferencia (F') y de un punto exterior de ésta (F), es una hipérbola cuyos focos son el centro de la circunferencia y el punto dado, y su eje principal el radio de dicha circunferencia.

Este lugar geométrico puede expresarse en forma distinta, en virtud de las consideraciones expuestas en la ficha P. G. 2802, párrafo 1, dando lugar al siguiente enunciado:

El lugar geométrico de los puntos (P) de un plano que sean centros de circunferencias tangentes a una dada (F') y a su vez pasen por un punto exterior de ésta (F), es una hipérbola cuyos focos son el centro de la circunferencia y el punto dados, y su eje principal el radio de dicha circunferencia.

Los puntos de la rama de hipérbola correspondiente al foco coincidente con el punto dado, son centros de circunferencias *tangentes exteriormente* a la dada. Los puntos de la rama de hipérbola correspondiente al foco coincidente con el centro de la circunferencia dada, son centros de circunferencias *tangentes interiormente* a la dada.

5. Hipérbola.-Tangente y normal; propiedades.

Consideremos (fig. 5) trazada una hipérbola, sus ejes, sus focos y la circunferencia focal correspondiente a uno de sus focos. Tomemos un punto cualquiera P de la hipérbola, que uniremos con sus focos. Hallemos la intersección del radio vector correspondiente al centro de la circunferencia focal (radio PF') con ésta; sea C el punto de intersección. En virtud de lo demostrado en el párrafo 4, se verificará que PC = PF, lo cual nos indica que el punto P está sobre la mediatriz del segmento CF. Unamos C con F y tracemos la mediatriz al segmento CF que pasará por P. Tomemos sobre

esta mediatriz otro punto cualquiera Q distinto de P, y unámoslo con los focos F y F' y con el punto C, formándose el triángulo QCF'.

Por una parte tenemos que PC = PF, y también por estar Q en la mediatriz de CF, que QC = QF; en el triángulo QCF' se verificará que

$$\mathbf{CF' > QF' - QC} \qquad (1)$$

pero por ser CF' = PF' — PF y QC = QF, sustituyendo estos valores en (1) se verificará que

$$\mathbf{2a = PF' - PF > QF' - QF}$$

lo cual nos indica que para cualquier punto de la mediatriz PQ excepto el P, la diferencia de sus distancias a los focos es siempre *menor* que el eje principal de la hipérbola, es decir, que excepto el punto P todos los puntos de la mediatriz PQ son *exteriores* a la hipérbola (ver párrafo 3 de esta ficha). Esto nos indica que la mediatriz PQ solo tiene común con la hipérbola el punto P y por consiguiente dicha mediatriz es *tangente* a la hipérbola en P.

5.1 Como el triángulo CPF (fig. 5) es isósceles, de base CF, la altura h_p correspondiente a P (ver ficha P. G. 2202, párrafo 3) será *mediatriz* de la

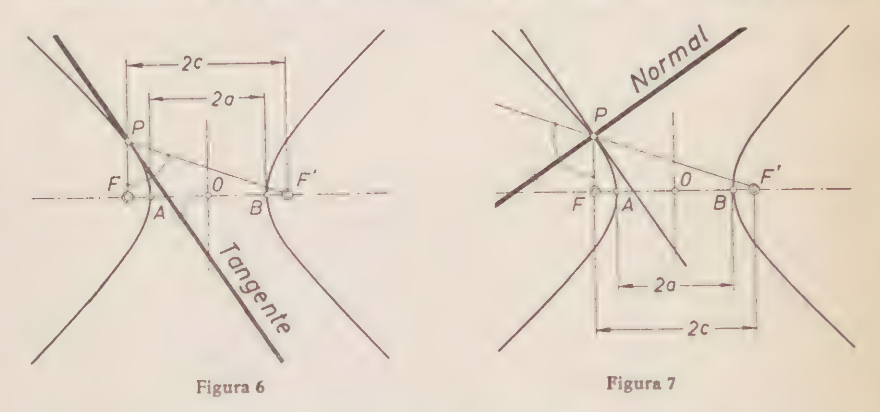


Figura 6

Figura 7

base, y al mismo tiempo *bisectriz* del ángulo CPF opuesto a ella; de aquí se deduce que

La tangente a la hipérbola por un punto F de ella, es bisectriz del ángulo formado por sus radios vectores (fig. 6).

5.2 La bisectriz del ángulo suplementario al FPF' formado por los radios vectores del punto P, será perpendicular a la bisectriz de dicho ángulo FPF' (ver ficha P. G. 2114, párrafo 1); por consiguiente

La normal a una hipérbola por un punto P de ella es bisectriz del ángulo formado por uno de sus radios vectores correspondiente a P y por la prolongación del otro radio vector (fig. 7).

5.3 Por estar Q en la mediatriz a CF (fig. 5) se verificará que QC = QF, lo que nos indica que el punto C, a más de estar situado en la circunferencia focal, está también en la circunferencia de centro Q y radio QF, por lo que será un punto de la intersección de ambas circunferencias. Esta propiedad nos sirve para el trazado de la tangente a la hipérbola por un punto exterior (ver ficha P. G. 2502).

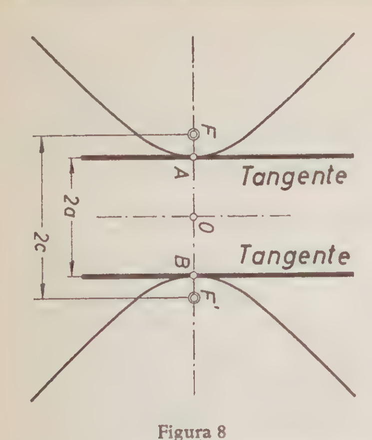


Figura 8

5.4 En los vértices A y B de la hipérbola (fig. 5), los radios vectores correspondientes a ellos forman un ángulo de 180°, siendo sus lados coincidentes con el eje focal, luego

Las tangentes en los vértices de una hipérbola son perpendiculares al eje focal (fig. 8).

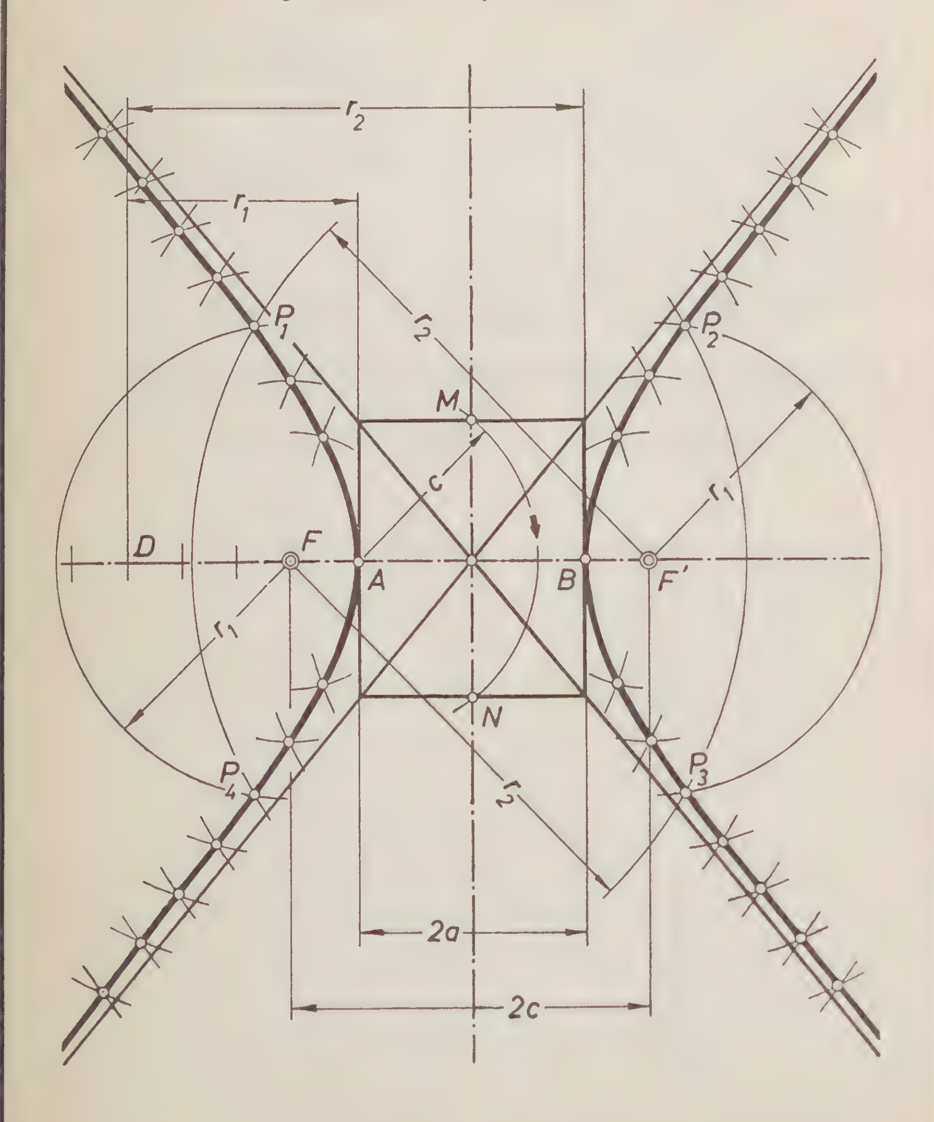
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una hipérbola dado su eje principal y su distancia focal.

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla.
Enero 1966

ENUNCIADO: *Construir una hipérbola dado su eje principal y su distancia focal.*



1. Generalidades.

Para construir una hipérbola es preciso fijar de antemano los datos necesarios que la definan completamente. La gran variedad posible en la fijación de estos datos da lugar a numerosísimos problemas de construcción de esta curva. Entre ellos destacan por su mayor aplicación los trazados en cuyos datos intervienen las longitudes de sus ejes, la de su distancia focal, la posición de la directriz, la del foco correspondiente a ésta y la excentricidad.

La construcción de una hipérbola conocida la directriz, el foco correspondiente a ésta y la excentricidad ε, ha sido resuelta de forma general para cualquier cónica, en la ficha P. G. 2451. No obstante la generalidad de este trazado, es poco corriente su empleo en el dibujo técnico, por obtenerse tan sólo con él puntos de la curva, quedando sin determinar con exactitud otros elementos importantes de la hipérbola, tales como sus ejes y sus focos.

Como los semiejes **a** y **b** de una hipérbola y la semidistancia focal **c**, forman un triángulo rectángulo de hipotenusa **c** y catetos **a** y **b** (ver ficha P. G. 2500, párrafo 3), es suficiente conocer la magnitud de dos de los lados de dicho triángulo para poder construirlo. Esto da lugar a los siguientes problemas fundamentales sobre construcción de la hipérbola:

1.° Construir una hipérbola dados sus ejes.

2.° Id. dados el eje principal y la distancia focal.

3.° Id. dados el eje transverso y la distancia focal.

Es evidente que todo procedimiento de construcción de la hipérbola cuando sean conocidos sus ejes (caso 1.°), puede emplearse en los casos 2.° y 3.°, ya que para la determinación del otro eje basta con aplicar previamente las sencillas construcciones dadas en la ficha P. G. 2212, a la que remitimos al lector. Igualmente, cuando los datos del problema sean distintos, y se conozca el procedimiento adecuado para que, en función de ellos, se puedan determinar sus ejes, es preferible este recorrido indirecto, pues como veremos a continuación, la construcción de una hipérbola por puntos, conocido su eje principal y su distancia focal, es sumamente fácil con auxilio del compás exclusivamente.

2. Resolución.

Sea **FF'** la distancia focal **2c**, y **AB** el eje principal **2a;** para que el problema planteado sea posible es preciso se verifique que **FF' > AB.**

2.1 Coloquemos los segmentos FF' y AB sobre una recta indefinida, de forma que sean coincidentes sus respectivos centros; para ello habrá que bisecar previamente ambos segmentos (ver ficha P. G. 2131).

2.2 Tomemos un punto cualquiera D sobre el eje principal y *exterior* al segmenfo FF'.

2.3 Con radio DA (distancia del punto D a un extremo del eje principal) y centro en el foco F, trácese una circunferencia o arco.

2.4 Con radio DB (distancia del punto D al otro extremo del eje principal), y centro en el foco F', trácese otra circunferencia o arco que cortará a la anterior en los puntos P_1 y P_4 que pertenecen a la hipérbola.

2.5 Si repetimos el trazado indicados en 2.3 y 2.4, tomando de forma inversa los centros de los focos, obtendremos otros dos puntos P_2 y P_3 que también pertenecen a la hipérbola, simétricos de los P_1 y P_4 con respecto al eje transverso.

2.6 Variando la posíción del punto D sobre el eje principal, obtendremos para cada posición, conjuntos de otros cuatro puntos de la hipérbola, en tantas posiciones como se deseen.

3. Demostración.

Este trazado está basado en la propiedad enunciada en el «Teorema de Dandelin para la hipérbola» (ver ficha P. G. 2500, párrafo 2). Efectivamente

3.1 Los puntos P_1 y P_4, por pertenecer a una circunferencia de centro en F y radio DA = r_1, equidista de F la magnitud DA (ver ficha P. G. 2802, l. g. n.º 1).

3.2 Por otra parte, dichos puntos P_1 y P_4, por pertenecer a una circunferencia de centro en F' y radio DB = r_2, también equidistan de F' la magnitud DB.

3.3 Por consiguiente, se verificará que $\mathbf{P_1F' - P_1F = r_2 - r_1}$ **= DB — DA = AB = constante,** es decir que el punto P_1 cumple la conocida propiedad de la hipérbola demostrada en el párrafo 2 de la mencionada ficha P. G. 2500.

Esta demostración es válida para los restantes puntos P_2, P_3 y P_4.

Aun cuando no es necesario para la construcción de la hipérbola por puntos, conocer lo magnitud del eje transverso **2b** ni la posición de las asíntotas, es conveniente el trazado previo de éstas, que pueden servirnos de guía al unir con trazo continuo los puntos obtenidos.

Para la determinación sobre la mediatriz a FF' (o a AB) de los puntos M y N extremos del eje transverso, basta hacer centro en A (o en B) con radio **c** y trazar un arco que corte a dicha mediatriz; los puntos de intersección M y N son los extremos buscados.

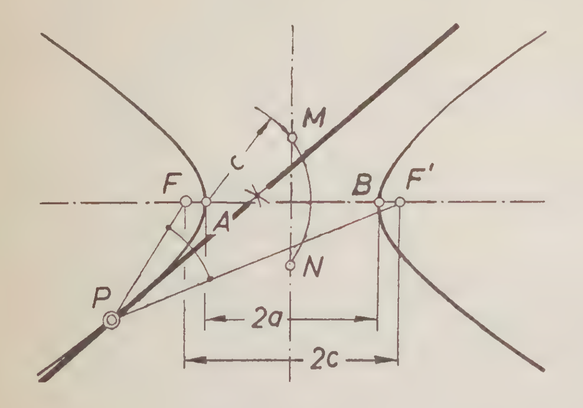
Trazando ahora por A y B paralelas al eje transverso, y por M y N paralelas al eje principal, se nos formará un paralelógramo rectángulo cuyas diagonales serán las asíntotas de la hipérbola (ver ficha P. G. 2500, párrafo 3).

Imp. Alvarez-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Por un punto dado trazar una recta tangente a una hipérbola.

ENUNCIADO: *Por un punto dado trazar una recta tangente a una hipérbola.*



Punto en la hipérbola

1 solución

2c

2a

T'

M

2a

T

C

c

F

F'

B

A

N

P

C'

Punto exterior

2 soluciones

1. Generalidades.

La propiedad fundamental de la hipérbola de ser el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una magnitud constante menor que la distancia focal, permite caracterizar la posición de los restantes puntos del plano con respecto a la hipérbola.

En la ficha P. G. 2500, párrafo 3, hemos establecido las condiciones que han de cumplir las distancias $\mathbf{d_F}$ y $\mathbf{d_{F'}}$ del punto a los focos, para distinguir los interiores de los exteriores a la hipérbola. Estas condiciones son las siguientes:

1.º	$d_F - d_{F'} > 2a$	Punto interior
2.º	$d_F - d_{F'} = 2a$	Punto en la hipérbola
3.º	$d_F - d_{F'} < 2a$	Punto exterior

El problema planteado no tiene solución en el caso primero, ya que cualquier recta que pase por un punto interior de la hipérbola, la corta en dos puntos, y por consiguiente nunca puede ser tangente a ella.

En los restantes casos 2) y 3), el problema se resuelve como a continuación indicamos:

2. Resolución.

2.1 Punto en la hipérbola.

Sea la hipérbola de distancia focal **FF' = 2c** y de eje principal **AB = 2a** debiendo ser **c > a** (figura superior). Supongamos un punto **P** cualquiera de dicha hipérbola, por el cual ha de trazarse la recta tangente.

2,11 Trácense los radios vectores **PF, PF',** correspondientes a dicho punto (ver ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 4.5).

2.12 Trácese la bisectriz del ángulo formado por dichos radios vectores (ver ficha P. G. 2114).

2.13 Dicha bisectriz será la tangente pedida.

Este trazado es consecuencia de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2500, hoja 2, párrafo 5.1, a la que remitimos al lector.

Obsérvese que este trazado no requiere la representación previa de la hipérbola; si ésta ha sido definida por sus elementos fundamentales **2a** y **2c,** y se conoce al mismo tiempo la posición del punto de tangencia, el

cual debe cumplir la condición $d_F - d_{F'} = 2a$ (ver párrafo 1 de esta ficha, se puede determinar previamente la recta tangente por dicho punto sin tener dibujada la hipérbola.

2.2 Punto exterior.

La tangente a una hipérbola que pase por un punto exterior a ésta, quedará perfectamente determinada cuando conozcamos otro punto **D** de ella. Para obtenerlo efectuemos la siguiente construcción, suponiendo previamente conocidos los ejes de la hipérbola, la posición de sus focos y la del punto **P** dados (figura inferior).

Sean **F** y **F'** los focos, **A** y **B** los vértices, y **P** el punto dado.

2.21 Con radio **2a** y centro en uno de los focos **F'**, trácese la circunferencia focal correspondiente a este foco (ver ficha P. G. 2500, hoja 2, párrafo 4).

2.22 Con radio **PF** (distancia de **P** al otro foco **F**), y centro en **P**, trácese un arco que cortará a la circunferencia focal en **C.**

2.23 La mediatriz del segmento **CF** será la tangente pedida (ver ficha P. G. 2500, hoja 2, párrafo 5). Como ya se conoce un punto **P** de ella, basta determinar otro cualquiera **D** aplicando el trazado dado en la ficha P. G. 2131).

La circunferencia trazada según **2.2** cortará a la circunferencia focal en otro punto **C'**, y también la mediatriz del segmento **C'F** será tangente a la hipérbola, por lo que el problema tendrá siempre *dos soluciones*.

El punto de tangencia **T** (o el **T'**) se obtiene por intersección de la recta **CF** (o la **C'F'**) con la tangente **PD** (o la **P'D**) trazada anteriormente.

Obsérvese en este trazado que, tanto para la determinación de las tangentes, como para la obtención de los puntos de contacto, no se requiere la representación previa de la hipérbola, sino conocer tan sólo sus ejes y la posición del punto **P** el cual ha de cumplir la condición de ser $PF - PF' < 2a$, para que el punto sea *exterior* a aquélla (ver ficha P. G. 2500, párrafo 3).

Este trazado es consecuencia de la propiedad demostrada en la ficha P. G. 2500, hoja 2, párrafo 5.3, a la que remitimos al lector.

Para el estudio de las analogías existentes entre los trazados de la hipérbola y elipse, compárese el desarrollo del texto y figuras de esta ficha con los de la P. G. 2462.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

CURVAS DE RODADURA

Generación y clasificación; propiedades.

Tangente y normal.

1. Generalidades.

Después de las curvas cónicas, estudiadas de forma general en las fichas P. G. 2450, hojas 1 a 3, le siguen en importancia técnica una familia de curvas, conocidas con el nombre genérico de «Curvas de rodadura» que tienen gran aplicación en el proyecto y construcción de engranajes cilíndricos y cónicos. El dibujante técnico debe pues conocer el trazado y propiedades de estas curvas que con gran frecuencia se le han de presentar en los trabajos de su vida profesional.

2. Movimiento de rodadura de una curva sobre otra.

En la ficha P. G, 2440, párrafo 2, hemos dado la definición de curva en general bajo su aspecto geométrico y también como concepto intuitivo y cinemático de movimiento de un punto. Bajo este último punto de vista, se precisa definir la ley con que se mueve el punto generador.

Para fijar la ley que rige el movimiento de un punto que describa una curva de rodadura, vamos a precisar previamente el concepto de movimiento de rodadura de una curva plana sobre otra, también plana, y situada en el plano de ella.

Sea (fig. 1) una curva plana cualquiera **d** que suponemos fija en su plano. Consideremos a continuación otra curva **r** también plana, tangente

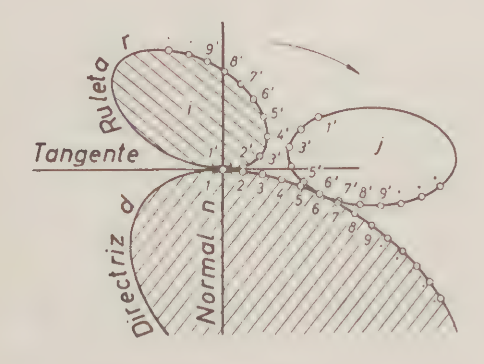


Figura 1

a la anterior y situada en el plano de aquélla; los elementos comunes de ambas curvas son el n.º 1 de la primera y el n.º 1' de la segunda. La tangente común **t** de ambas curvas será la recta prolongación del elemento común de contacto, y la normal común **n** la perpendicular a la anterior en el punto medio de dicho elemento (ver ficha P. G. 2440, párrafo 3).

 | Enero 1966

Supongamos móvil la curva **r** en la dirección de la flecha. Se dice que la curva **r** *rueda* sobre la fija **d** en su plano, cuando el movimiento de aquélla se realiza de tal forma que los elementos consecutivos 1', 2', 3',... de la curva móvil **r** se vayan adaptando sucesivamente a los 1, 2, 3,... de la curva fija **d** sin que se produzca *deslizamiento* de unos sobre otros.

A la curva móvil **r** se le da el nombre de *ruleta,* y a la curva fija **d** el de *directriz* (algunos autores la llaman también base).

En todas las posiciones de la ruleta, se conserva ésta siempre tangente a la directriz, y al no haber deslizamiento de la ruleta sobre la directriz, las longitudes de arcos recorridos entre la posición inicial y otra cual-

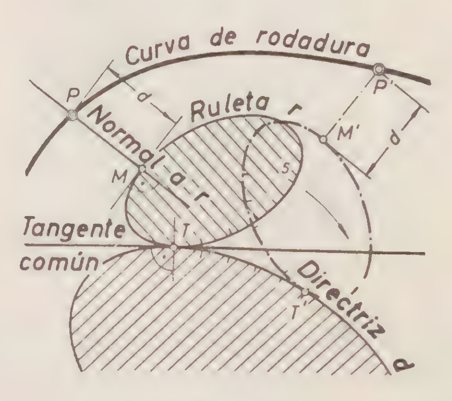


Figura 2

quiera sucesiva, son siempre iguales para ambas curvas. Es decir, si consideramos trasladada la ruleta **r** de la figura 1, desde la posición inicial **i** a la posición **j**, en que tienen en contacto el elemento común 6-6', el arco 1-2-3-4-5-6 de la directriz será de igual longitud que el arco 1'-2'-3'-4'-5'-6' de la ruleta.

El movimiento de rodadura se verifica en cada instante como un *giro infinitesimal* de la ruleta alrededor del elemento común o punto de contacto. Por este motivo a dicho punto se le da el nombre de *centro instantáneo de rotación.*

3. Curvas de rodadura.-Definición.

Sea (fig. 2) **r** una curva plana cualquiera que tiene un movimiento de rodadura sobre otra fija **d** en el sentido de la flecha, siendo **T** el punto de contacto en la posición inicial del movimiento.

Se dice que un punto **P** del plano de la ruleta está *invariablemente unido a la curva* **r,** cuando conserva su posición relativa con respecto a ésta

durante todo su movimiento. Esto equivale a decir que la distancia **d** de **P** a la curva, medida sobre la normal que pasa por **P** es siempre constante durante todo el movimiento de la ruleta.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, definiremos como *curva de rodadura* en general, a *la trayectoria descrita por un punto cualquiera del*

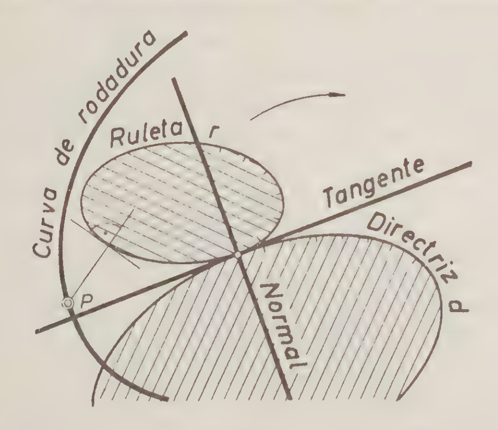


Figura 3

plano de la ruleta unido invariablemente a ésta, durante su movimiento de rodadura alrededor de la directriz.

4. Curvas de rodadura.-Propiedades generales.

De acuerdo con las definiciones anteriores vamos a exponer las principales propiedades de las curvas de rodadura.

4.1 La posición que ocupa el punto generador de una curva de rodadura en un instante cualquiera, depende de la relativa de la ruleta con respecto a la directriz. En cualquier posición considerada, *la curva ruleta ha de ser tangente a la curva generatriz.* Por consiguiente, *la normal y la tangente de ambas curvas, en el punto de contacto, son coincidentes (fig. 3).*

4.2 Si consideramos comienza a engendrarse la curva desde una posición inicial determinada de la ruleta, y llega a ocupar otra posición cualquiera posterior, rodando sobre la directriz, siempre se verificará que *la longitud de los arcos de la ruleta y directriz, que hayan estado en contacto durante el movimiento, son iguales.*

En la figura 4 hemos representado la ruleta **r** en su posición inicial tangente a la directriz **d** y el punto generador **P** sobre la normal a **r**, siendo **T** el punto de contacto de **r** y **d**.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

CURVAS DE RODADURA

(continuación)

En otra posición cualquiera, la ruleta **r** y la directriz **d** siguen siendo tangentes en **T'**; el punto generador **P** habrá pasado a ocupar la posición

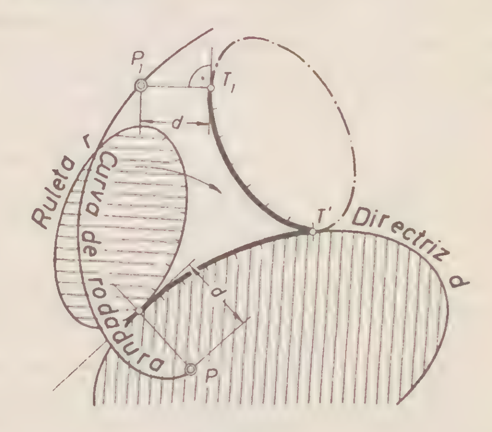


Figura 4

P_1, conservando su posición relativa con respecto a la ruleta, y el punto inicial de tangencia **T** se habrá trasladado a la posición **T_1**, verificándose que

$$\textbf{arco } TT' = \textbf{arco } T_1T'$$

4.3 Consideremos el movimiento de giro infinitesimal que sufre la ruleta al pasar de una posición cualquiera a otra infinitamente próxima (fig. 5). Sean **P** el punto generador y **T** el de contacto de **r** con **d** en la posición considerada; si unimos **P** con **T**, el punto **P** recorrerá, al pasar de la posición anterior a otra infinitamente próxima, un arco de circunferencia también infinitesimal de centro en **T** y radio **PT**, engendrando al mismo tiempo un elemento de la curva de rodadura. La prolongación de dicho elemento será tangente en **P** a dicha curva de rodadura y coincidirá con la tangente a la circunferencia de radio **PT** que pasa por el centro instantáneo de rotación **T**.

Por consiguiente, *la normal en un punto cualquiera de una curva de rodadura, pasa siempre por el centro instantáneo de rotación, y la tangente en dicho punto es perpendicular a la recta que lo une con el mencionado centro instantáneo de rotación.*

Queremos hacer destacar, para evitar posibles confusiones, que *el centro instantáneo de rotación* **T no coincide** *con el centro de curvatura de la curva de rodadura engendrada por el punto* **P.**

En efecto, la circunferencia de radio **PT** = **a**, por tener su centro en la normal, es una de las infinitas que pueden trazarse con centro en dicha normal que sólo tienen con la curva un contacto de primer orden (ver ficha P. G. 2440, hoja 2, párrafo 5.141). Si consideramos una posición infinitamente próxima de la ruleta que engendra el siguiente elemento de la curva de rodadura, es fácil comprender que el centro instantáneo de rotación de este segundo elemento, será diferente de **T**, ya que este punto, contacto de la ruleta con la directriz, se habrá desplazado a una distancia infinitesimal de **T**; por consiguiente, las dos normales de los dos elementos consecutivos tendrán un punto común (centro de curvatura de la curva de rodadura) distinto de **T** (ver ficha P. G. 2440, hoja 3, párrafo 5.171).

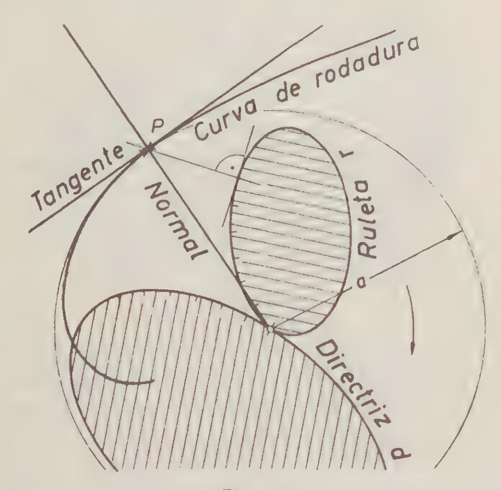


Figura 5

5. Curvas de rodadura.-Clasificación.

En esta ficha hemos estudiado el movimiento de rodadura de una curva plana sobre otra también plana, cuando dicho movimiento se efectúa en el plano de ambas curvas. Pero se concibe también que puede existir movimiento de rodadura sin que los planos de ambas curvas sean coincidentes, pudiendo formar entre sí un ángulo determinado.

Las propiedades generales estudiadas en el párrafo 4, son extensivas a las curvas de rodadura engendradas en el mencionado caso más general, en que los planos de la directriz **d** y de la ruleta **r** formen un ángulo determinado, *siempre constante*, en su movimiento.

Las curvas engendradas en el primer caso serán naturalmente *planas*, y las del segundo caso, *alabeadas*. Esto da lugar a una primera clasificación general en

1. Curvas de rodadura planas.
2. Curvas de rodadura alabeadas.

En ambos casos, el punto generador puede estar situado o no sobre la curva ruleta. En el primer caso la curva engendrada se llama «Curva de rodadura *normal*» y en el segundo caso «Curva de rodadura *alargada*» si el punto generador es exterior a la ruleta, o «Curva de rodadura *acortada*» si es interior.

Entre la infinita variedad de curvas de rodadura que pueden concebirse combinando curvas geométricas, tanto para la directriz como para la ruleta, merecen especial mención por sus aplicaciones en la técnica, aquellas en que tanto la ruleta como la directriz, son circunferencias, incluyendo la posibilidad de que una de ellas tenga radio infinito y se transforme en recta. A esta familia de curvas se las denominan «**Curvas cíclicas**», pudiendo ser planas o alabeadas. Estas curvas cíclicas son de gran aplicación, según hemos dicho en el párrafo 1 de esta ficha, en el proyecto y construcción de engranajes cilíndricos y cónicos, por lo que las estudiaremos con todo detalle.

La definición y denominación de las curvas cíclicas, que nos ha de servir para su estudio, la estableceremos de la forma siguiente:

CURVAS CÍCLICAS PLANAS

Directriz d	Ruleta r	Denominación
Recta	Circunferencia	Cicloide
Circunferencia	Circunferencia tangente exteriormente a **d** o interiormente, cuando su radio es mayor que **d**.	Epicicloide
Circunferencia	Circunferencia tangente interiormente a **d**, siendo su radio menor que el de **d**.	Hipocicloide
Circunferencia	Recta	Evolvente de círculo

CURVAS CÍCLICAS ALABEADAS

Directriz d	Ruleta r	Denominación
Circunferencia	Circunferencia	Epicicloide esférica

Todas las curvas cíclicas anteriores pueden ser *normales, alargadas o acortadas.*

Estudiada la generación, propiedades generales y clasificación de las curvas de rodadura, podemos anticipar que el trazado de cualquiera de ellas podrá efectuarse siempre y cuando sepamos representar diferentes posiciones de la ruleta en contacto con la generatriz, y obtener en cada posición el lugar que ocupará el punto generador unido invariablemente a la ruleta; es más, si esto ha sido posible, también podemos obtener con facilidad gráficamente la posición de la tangente y normal en un punto cualquiera de dicha curva de rodadura, ya que es conocido el centro instantáneo de rotación.

Este es el método general que seguiremos en el estudio de cada caso particular de las curvas cíclicas, tanto planas como alabeadas.

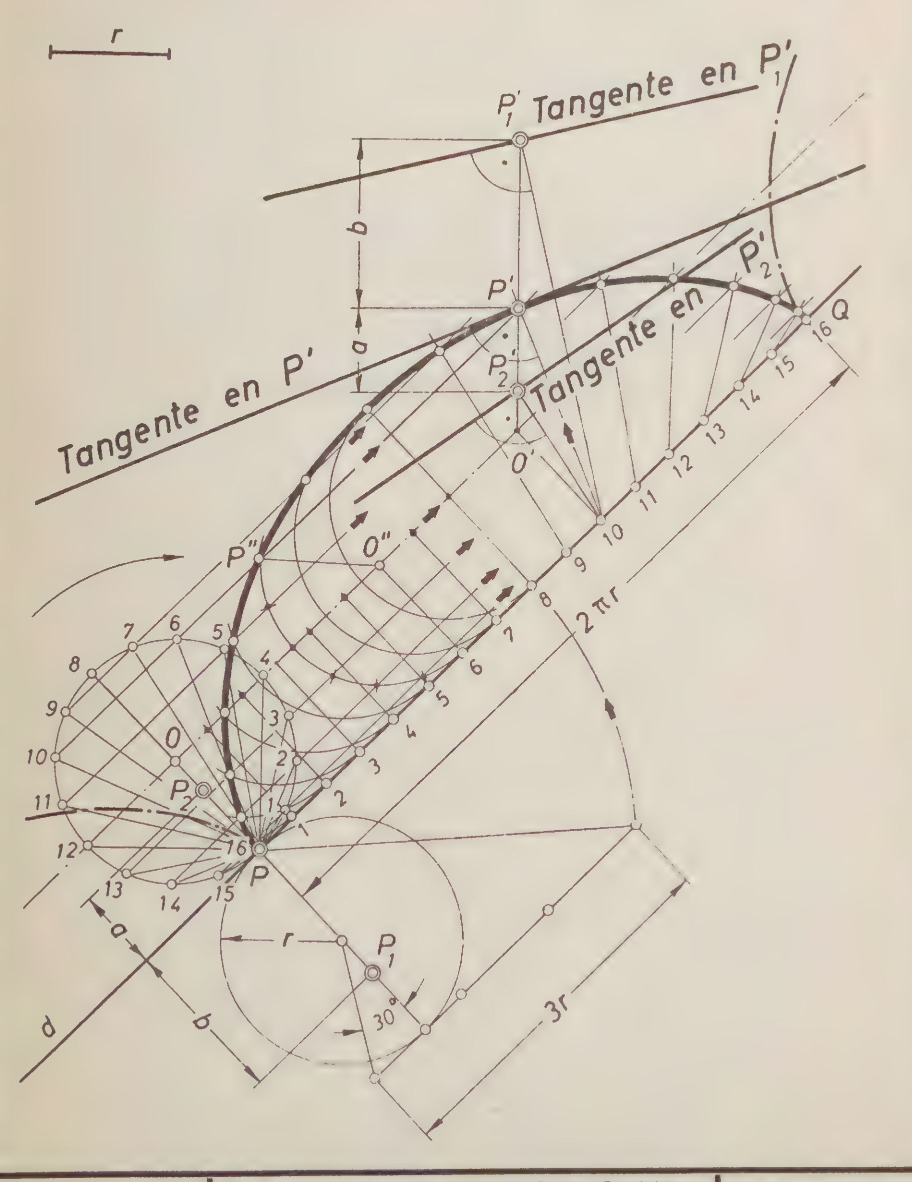
Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una cicloide normal dado el radio de la ruleta.

Ficha n.º 92	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2530

ENUNCIADO: *Construir una cicloide normal dado el radio de la ruleta.*



Reproducción prohibida	Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla	Enero 1966

1. Generalidades.

En la clasificación general de las curvas cíclicas que hemos realizado en la ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 5, figura la cicloide como caso particular de las curvas cíclicas planas en que la directriz es una línea recta y la ruleta una circunferencia. Como ya hemos indicado en la mencionada ficha, las curvas cíclicas planas son a su vez casos particulares de las más generales denominadas curvas de rodadura, cuyas propiedades principales han sido desarrolladas en las fichas P. G. 2520, hojas 1 y 2.

Vamos a aplicar dichas propiedades generales de las curvas de rodadura al trazado del problema planteado en esta ficha sobre construcción de la cicloide normal, teniendo como dato el radio de la ruleta. De acuerdo con los conceptos generales de curvas de rodadura y de la clasificación de las curvas cíclicas planas, podemos definir la cicloide normal como *curva engendrada por un punto de una circunferencia que se mueve rodando sin resbalar sobre una recta.* La recta dada será pues la directriz **d** y la circunferencia móvil la ruleta **r**, sobre la que se encuentra el punto generador **P.**

Si consideramos la posición inicial del movimiento de la ruleta sobre la directriz, en que el punto generador **P** sea el de contacto, se concibe fácilmente que cuando la ruleta **r** haya dado una vuelta completa, el punto generador volverá a estar de nuevo en contacto con la recta, habiéndose desplazado sobre ésta una magnitud igual al desarrollo de la circunferencia ruleta; cuando esto suceda se dice que el punto generador ha efectuado un *ciclo.* En una fracción determinada de vuelta, puede obtenerse la posición del punto generador sabiendo que son iguales las longitudes del arco de la ruleta y segmento de directriz que hayan estado en contacto durante el movimiento (ver ficha P. G. 2530, párrafo 4.1).

Si el movimiento continúa después del primer ciclo, la curva cicloide se repite continua e indefinidamente sobre la directriz, tanto en un sentido como en otro de la recta. Dos ciclos consecutivos tienen un punto de retroceso de segunda especie en el lugar donde se verifica el contacto del punto generador con la recta directriz (ver ficha P. G. 2440, hoja 4, párrafo 7.3); la tangente en dicho punto es perpendicular a la directriz y separa ambas ramas de la curva.

Las consideraciones anteriores justifican el trazado que damos a continuación.

2. Resolución.

Sea **r** el radio de la ruleta y **P** un punto cualquiera de la misma que engendra la cicloide.

2.1 Sobre una recta indefinida **d** situemos la ruleta tangente a ella, siendo **P** el punto de contacto.

2.2 Al girar la ruleta sobre la directriz, el centro **O** de la misma se deslizará sobre una recta paralela a **d** a la distancia **r**, por ser dicha paralela

el l. g. de los centros de circunferencias tangentes a **d** (ver ficha P. G. 2804, l. g. n.º 12). Tracemos esta paralela por **O.**

2.3 A partir de **P** sobre **d**, tómese un segmento **PQ** igual a la longitud de la circunferencia ruleta (ver ficha P. G. 2413).

2.4 Dividamos la circunferencia de la ruleta en un número cualquiera de partes iguales (16 en la figura)*, y el segmento **PQ** *en el mismo número de partes* también iguales (ver ficha P. G. 2010), con lo que las divisiones de la directriz serán los desarrollos de los arcos en que queda dividida la ruleta.

2.5 Tracemos por los puntos de división 1, 2, 3,... de la directriz, perpendiculares a ella (que serán paralelas a **OP**) hasta su encuentro con la paralela trazada según 2.2. Estos puntos serán los centros de las posiciones sucesivas que ocupará la ruleta cuando los puntos de división de ésta con la directriz vayan coincidiendo en su movimiento.

2.6 Trácense las circunferencias tangentes a **d** por los centros obtenidos según 2.5, y tómese sobre ellas, a partir del punto de contacto, tantas divisiones iguales como corresponden al punto considerado. El punto **P''** p. e. correspondiente a la posición 6.ª de la ruleta, y centro en **O''** se obtiene tomando a partir del punto 6, seis divisiones de arco. Los extremos de los arcos anteriores, unidos por un trazo continuo, nos darán la cicloide.

Este trazado lo hemos ejecutado en la mitad izquierda de la figura.

Puede obtenerse una mayor simplificación mediante el trazado que damos en la mitad derecha, sin demostrar, por su sencillez.

Para determinar la posición que ocupa el punto generador **P'** en un momento determinado del movimiento, y que suponemos sea p. e. cuando coincidan los puntos 10 de la ruleta y directriz, basta con trazar por el punto 10 de la ruleta una paralela a la directriz, y con centro en el punto 10 de la directriz y radio **P-10** de la ruleta, trazar un arco que cortará a la anterior paralela en un punto **P'** correspondiente a la posición en 10 del punto generador. La perpendiculor a **d** por 10, nos determinará la posición del centro **O'** de la ruleta sobre la recta trazada según 2.2, cuya circunferencia pasará también por **P'.**

Si el punto generador fuese exterior (**P_1**) o interior (**P_2**) a la ruleta, éstos ocuparán las posiciones **P'_1** y **P'_2** a las distancias **b** y **a** de la ruleta, en dirección del radio; dichos puntos pertenecerán a una cicloide alargada o acortada respectivamente, lo cual permite el trazado de ambas. La tangente en **P'_1** será perpendicular a la recta **P'_1-10;** la tangente en **P'** perpendicular a la **P'-10** y la tangente en **P'_2**, perpendicular a la **P'_2-10** (ver ficha P. G. 2520, párrafo 4.3).

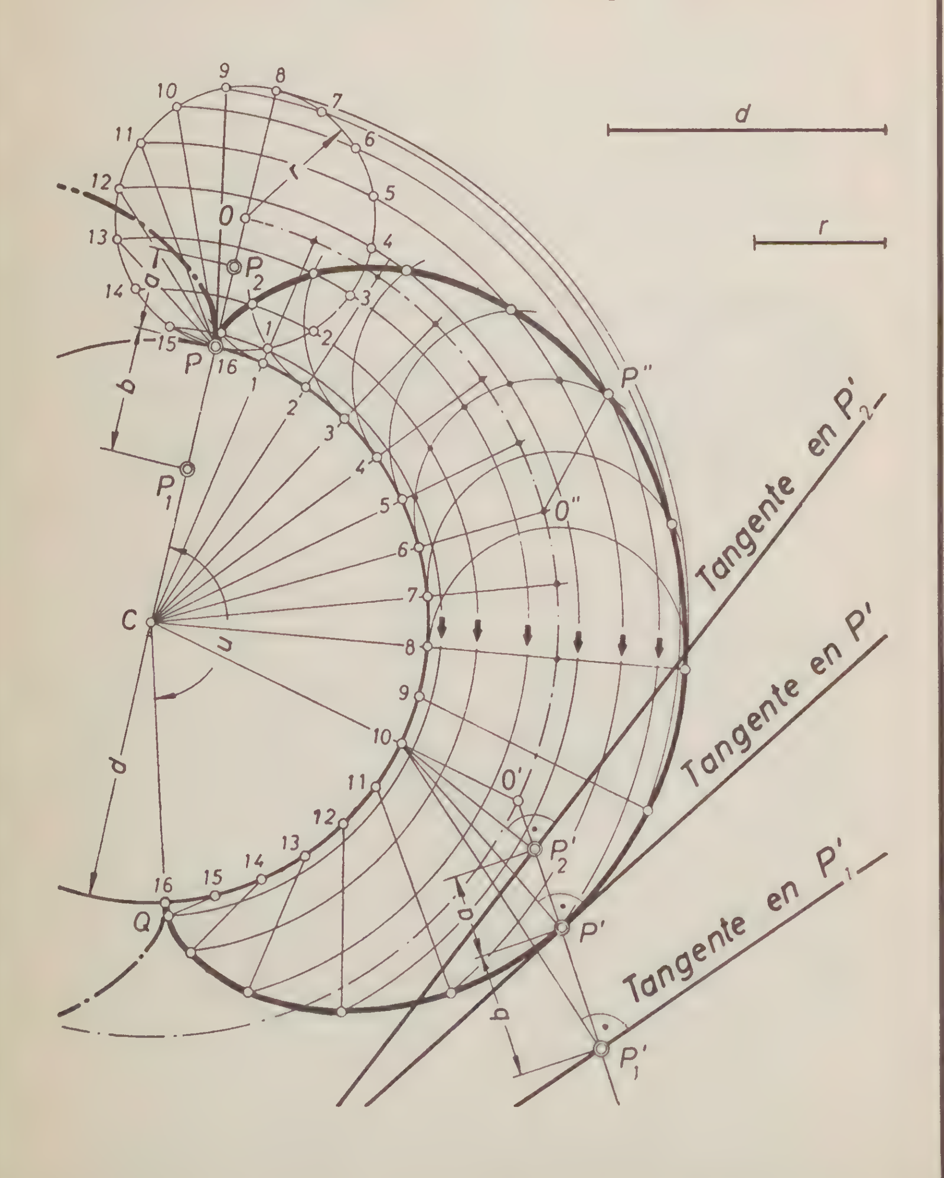
* Dos diámetros perpendiculares dividen a la circunferencia en 4 partes iguales; bisecando estos ángulos obtendremos 8 partes y por una nueva bisección, 16 partes. La sencillez de estas construcciones es la razón por la que tomamos 16 como número de divisiones.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una epicicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz.

ENUNCIADO: *Construir una epicicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz.*



 | Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla | Enero 1966

1. Generalidades.

En la clasificación general de las curvas cíclicas que hemos realizado en la ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 5, figura la epicicloide como caso particular de las curvas cíclicas planas en que la directriz es una circunferencia y la ruleta otra, tangente exteriormente a la directriz, o también tangente interiormente pero de mayor radio que ésta. Como ya indicamos en la mencionada ficha, las curvas cíclicas planas son a su vez casos particulares de las más generales denominadas curvas de rodadura, cuyas propiedades principales han sido desarrolladas en las fichas P. G. 2520, hojas 1 y 2.

Vamos a aplicar dichas propiedades generales de las curvas de rodadura al trazado del problema planteado en esta ficha sobre construcción de la epicicloide normal, teniendo como datos los respectivos radios de las circunferencias directriz y ruleta. De acuerdo con los conceptos generales de curvas de rodadura y de la clasificación de las curvas cíclicas planas, podemos definir la epicicloide normal como *curva engendrada por un punto de una circunferencia que se mueve rodando sin resbalar sobre otra circunferencia, conservándose ambas circunferencias en su movimiento tangentes exteriormente, pudiendo tener la ruleta un radio cualquiera, o bien tangentes interiormente pero siendo siempre el radio de la ruleta mayor que el de la directriz.*

Anticipando conceptos que serán tratados más extensamente en otra ficha, vamos a indicar que toda epicicloide engendrada por una ruleta de radio **r** que gire sobre una directriz de radio **d,** *tangentes ambas exteriormente,* **puede ser engendrada también** por otra ruleta de radio **d + r** que gire sobre la misma directriz **d,** pero *tangentes interiormente.* A las ruletas de radios **r** y **d + r** se las llaman *ruletas complementarias.*

Esta propiedad justifica las condiciones establecidas para la epicicloide en la clasificación de las curvas cíclicas dada en la ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 5.

Si consideramos la posición inicial del movimiento de la ruleta sobre la directriz, en la que el punto generador **P** sea el de contacto, se concibe fácilmente que cuando la ruleta **r** haya dado una vuelta completa, el punto generador volverá a estar en contacto con la directriz, y se dice que dicho punto ha efectuado un *ciclo* completo. Si el movimiento continúa, vuelve a repetirse la epicicloide en ciclos sucesivos, formándose un punto de retroceso en la unión de dos ciclos consecutivos (ver ficha P. G. 2440, hoja 4, párrafo 7.3); la tangente en dicho punto es el radio de la directriz que pasa por él.

Si la relación **r : d** de los números que miden los radios **r** y **d** es racional, se superpondrán los ciclos después de un determinado número de vueltas; por el contrario esto no ocurrirá, si dicha relación es irracional.

2. Resolución.

Sean **r** el radio de la ruleta, **d** el de la directriz y **P** el punto generador situado sobre ésta.

2.1 Dibujemos las circunferencias **r** y **d** tangentes exteriormente* y supongamos sea el punto de contacto **P** el punto generador, **O** el centro de la ruleta y **C** el centro de la directriz.

2.2 Con centro en **C** y radio **CO** (**d** + **r**), trácese una circunferencia que será el l. g. de los centros de otras tangentes a **d** y radio **r** (ver ficha P. G. 2804, l. g. n.º 10).

2.3 Dividamos la circunferencia ruleta en un cierto número de partes iguales (16 en la figura) y llevemos las cuerdas de estos arcos sobre la circunferencia directriz el mismo número de veces que las partes en que hayamos dividido la ruleta (si las divisiones son pequeñas, las longitudes de arcos serán, con muy pequeño error, sensiblemente iguales).

2.4 Tracemos por los puntos 1, 2, 3, ... de la directriz los radios C1, C2, C3... hasta encontrar a la circunferencia trazada según 2.2

2.5 Tracemos circunferencias tangentes a **d** por los centros obtenidos según **2**.4, y tomemos sobre ellas, a partir del punto de contacto, tantas divisiones iguales como correspondan al punto considerado. El punto **P''** p. e. correspondiente a la división sexta de la ruleta y centro **O''** se obtiene tomando a partir del punto 6, seis divisiones de arco. Los extremos de los arcos anteriores, unidos por un trazo continuo, nos darán la epicicloide.

Este trazado lo hemos realizado en la primera mitad de la figura.

En la otra mitad damos, sin demostrar por su sencillez, un trazado más simplificado.

Para determinar la posición que ocupa el punto generador **P'** en un momento determinado del movimiento, y que suponemos sea p. e. cuando coincidan los puntos 10 de la ruleta y directriz, basta con trazar por el punto 10 de la ruleta un arco concétrico con **d**, y con centro en el punto de 10 de la directriz y radio **P-10** de la ruleta, trazar otro arco que cortará a la anterior circunferencia en un punto **P'** correspondiente a la posición en 10 del punto generador, y por consiguiente pertenecerá a la epicicloide. El radio **C-10** nos determinará la posición del centro **O'** de la ruleta sobre la circunferencia trazada según 2-2; la circunferencia de radio **O'-10** pasará por **P'**.

Si el punto generador fuese exterior P_1 o interior P_2 a la ruleta, éstos ocuparán las posiciones P'_1 y P'_2 a las distancias **b** y **a** de la ruleta, en la dirección del radio; dichos puntos pertenecerán a una epicicloide alargada o acortada respectivamente, lo cual permite el trazado de ambas.

La tangente en P'_1 será perpendicular a la recta P'_1**-10;** la tangente en **P'** perpendicular a la **P'-10** y la tangente en P'_2 perpendicular a la P'_2**-10** (ver ficha P. G. 2520, párrafo 4.3).

Obsérvese la analogía de este trazado con el estudiado para la cicloide en la ficha P. G. 2530, que puede deducirse del de esta ficha haciendo infinito el radio de la directriz (directriz recta).

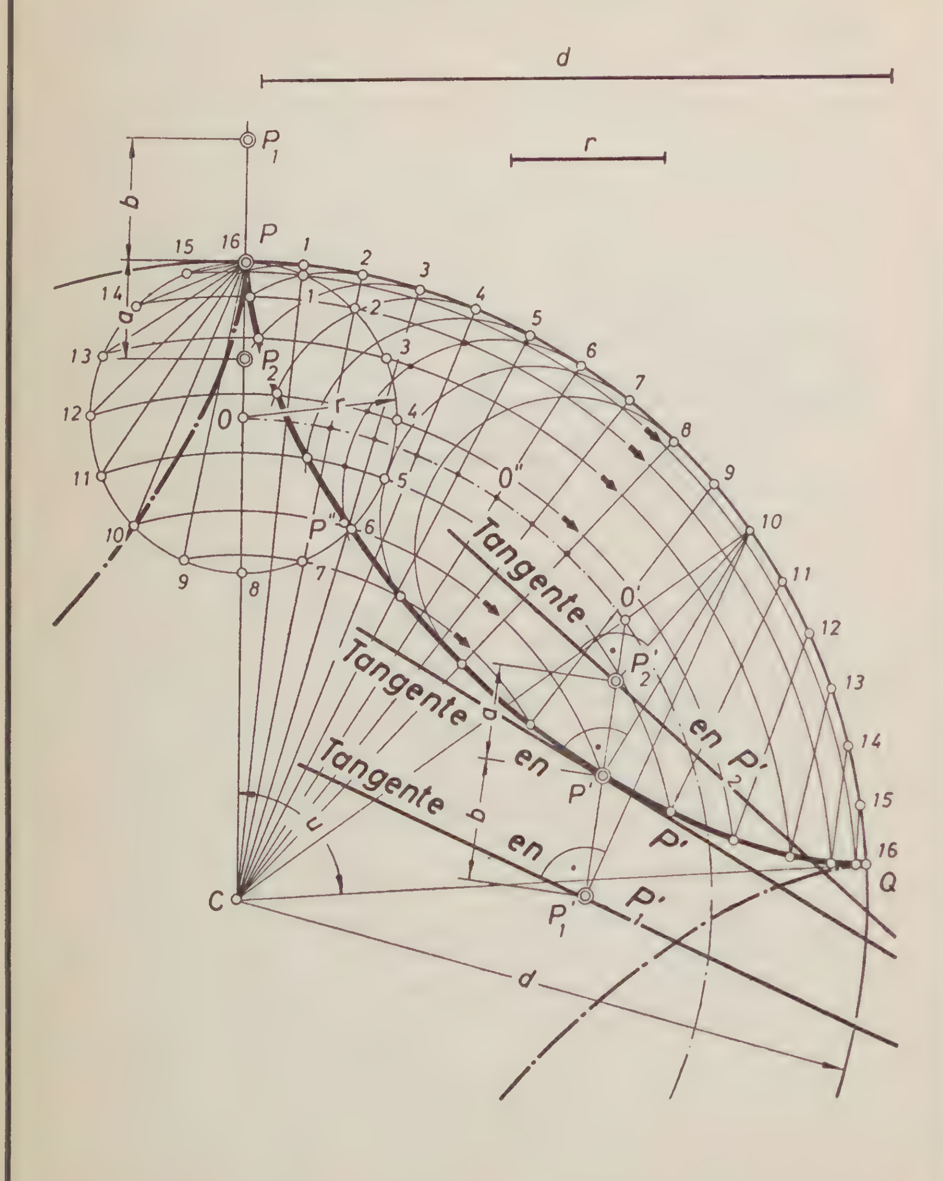
* El trazado es igual si las circunferencias son tangentes interiores y se verifica que r > d.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una hipocicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz.

ENUNCIADO: *Construir una hipocicloide normal dados los radios de la ruleta y directriz.*



 | Enero 1966

1. Generalidades.

También la hipocicloide figura como caso particular de las curvas cíclicas planas cuya clasificación hemos realizado en la ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 5, siendo a su vez las curvas cíclicas casos particulares de las curvas de rodadura, estudiadas en la ficha P. G. 2520, hojas 1 y 2. En la hipocicloide, la directriz es una circunferencia y la ruleta también lo es, tangente interiormente a la directriz y de radio menor que el de ésta.

Vamos a aplicar las propiedades generales de las curvas de rodadura al trazado del problema planteado en esta ficha sobre la construcción de la hipocicloide normal, conocidos los radios **d** y **r** de la directriz y ruleta respectivamente, siempre que sea **d** > **r.**

Podemos definir la hipocicloide normal como *curva engendrada por un punto de una circunferencia que se mueve rodando sin resbalar dentro de otra circunferencia, conservándose la primera, durante todo el movimiento, tangente interiormente a la segunda.*

Anticipando conceptos que serán tratados más extensamente en otra ficha, vamos a indicar que toda hipocicloide engendrada por una ruleta de radio **r,** que gire en el interior de otra circunferencia de radio **d** (directriz), tangentes ambas interiormente (**d** > **r**), **puede ser engendrada también** por otra ruleta de radio **d-r** que gire interiormente sobre la misma directriz **d.** A las ruletas de radios **r** y **d-r** se las llaman *ruletas complementarias.*

Si consideramos la posición inicial del movimiento de la ruleta sobre la directriz, en la que el punto generador **P** sea el de contacto, se concibe fácilmente que cuando la ruleta **r** haya dado una vuelta completa, el punto generador volverá a estar en contacto con la directriz, y se dice que dicho punto ha efectuado un *ciclo* completo. Si el movimiento continúa, vuelve a repetirse la hipocicloide en ciclos sucesivos, formándose un punto de retroceso en la unión de dos ciclos consecutivos (ver ficha P. G. 2440, hoja 4, párrafo 7.3); la tangente en dicho punto es el radio de la directriz que pasa por él. Si la relación **r:d** de los números que miden los radios **r** y **d** es racional, se superpondrán los ciclos después de un determinado número de vueltas; por el contrario esto no ocurrirá si dicha relación es irracional.

Las consideraciones anteriores justifican el trazado que damos a continuación.

2. Resolución.

Sean **r** el radio de la ruleta, **d** el de la directriz y **P** el punto generador situado sobre ésta.

2.1 Dibujemos las circunferencias **r** y **d** tangentes interiormente y supongamos sea el punto de contacto **P** el punto generador, **O** el centro de la ruleta y **C** el centro de la directriz.

2.2 Con centro en **C** y radio **CO** (d-r), trácese una circunferencia que será el l. g. de los centros de otras tangentes a **d** y radio **r** (ver ficha P. G. 2804, l. g. n.º 10).

2.3 Dividamos la circunferencia ruleta en cierto número de partes iguales (16 en la figura) y llevemos las cuerdas de estos arcos sobre la circunferencia directriz, el mismo número de veces que las partes en que hayamos dividido la ruleta (si las divisiones son pequeñas las longitudes de arcos serán, con muy pequeño error, sensiblemente iguales).

2.4 Tracemos por los puntos 1, 2, 3,... los radios C1, C2, C3,... que cortarán a la circunferencia trazada según 2.2.

2.5 Tracemos circunferencias tangentes a **d** por los centros obtenidos según 2.4, y tomemos sobre ellas, a partir del punto de contacto, tantas divisiones iguales como correspondan al punto considerado. El punto **P''** p. e. correspondiente a la división 6.ª de la ruleta y centro **O''** se obtiene tomando a partir del punto 6, seis divisiones de arco. Los extremos de los arcos anteriores, unidos por un trazo continuo, nos darán la hipocicloide.

Este trazado lo hemos realizado en la primera mitad de la figura.

En la otra mitad damos, sin demostrar por su sencillez, un trazado más simplificado.

Para determinar la posición que ocupa el punto generador **P'** en un momento determinado del movimiento, y que suponemos sea p. e. cuando coincidan los puntos 10 de la ruleta y directriz, basta con trazar por el punto 10 de la ruleta un arco concéntrico con **d,** y con centro en el punto 10 de la directriz y radio **P-10** de la ruleta, trazar un arco que cortará a la anterior circunferencia en un punto **P'**, correspondiente a la posición en 10 del punto generador, y por consiguiente perteneciente a la hipocicloide. El radio **C-10** nos determinará la posición del centro **O'** de la ruleta sobre la circunferencia trazada según 2.2; la circunferencia de radio **O'-10** pasará también por **P'.**

Si el punto generador fuese exterior (P_1) o interior (P_2) a la ruleta, éstos ocuparán las posiciones P'_1 y P'_2 a las distancias **b** y **a** de la ruleta, en dirección del radio; dichos puntos pertenecerán a una hipocicloide *alargada* o *acortada* respectivamente, lo cual permite el trazado de ambas.

La tangente en P'_1 será perpendicular a la P'_1**-10;** la tangente en **P'**, perpendicular a la **P'-10** y la tangente en P'_2, perpendicular a la P'_2**-10** (ver ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 4.3).

Obsérvese la analogía de este trazado con el estudiado para la epicicloide en la ficha P. G. 2540, cuya explicación es casi coincidente.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

NORMALIZACIÓN
DE
PERFILES LAMINADOS DE ACERO

Viga de perfil normal (PN)

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla.
Enero 1966

1. Generalidades.

Las vigas cuya sección recta tienen forma I (denominadas también de doble té) están normalizadas en España en la norma UNE 36521, y abarca la gama de perfiles laminados en nuestro país. Dicha norma es parte de la más general alemana DIN 1025 hoja 1. En el estudio que hacemos de este perfil, hemos tomado como base la alemana, de mayor amplitud, indicando en letra cursiva los valores de los perfiles no incluídos en la norma española.

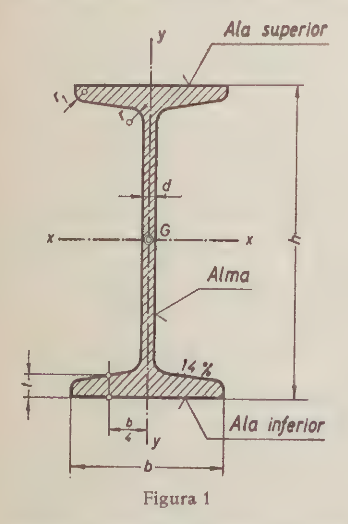


Figura 1

2. Designación.

La designación de un perfil determinado de viga, empleada en *escritos comerciales*, es función de la altura de la misma. Se expresa de la forma que a continuación se indica:

Viga (PN) 20 UNE 36521

en la que el número 20 es la altura del perfil expresada en centímetros.

En los *dibujos técnicos* se simplifica esta designación sustituyendo la palabra «viga» por su símbolo I, y suprimiendo el número de la norma que queda sobreentendida. Su designación abreviada es

I (PN) 20

y cuando no haya lugar a dudas, por el empleo exclusivo de perfiles normalizados, se llega a la designación más simplificada aún de

I 20

que es la más utilizada en dibujos de construcción de estructuras metálicas.

3. Dimensiones normalizadas para su representación en dibujos técnicos.

Este perfil tiene dos ejes de simetría **x-x, y-y,** llamados *ejes principales de inercia* y su intersección **G** es el *centro de gravedad* del mismo. Sus dimensiones normalizadas, expresadas en milímetros, son las siguientes (fig. 1):

3.1 **h** Altura del perfil.

3.2 **b** Ancho de las alas.

3.3 **d** Espesor del alma. Este espesor es constante en toda su longitud.

3.4 **t** Espesor medio de las alas. Este espesor es variable, y está dado a la distancia $\frac{b}{4}$ del eje y-y. La inclinación interior de las alas es del 14 % en todos los perfiles (correspondiente a un ángulo de 8° muy aproximadamente; ver fichas P. G. 2110 hojas 2 y 3).

3.5 **r** Radio de redondeamiento interior.

3.6 **r_1** Radio de redondeamiento exterior.

3.7 En la tabla que damos a continuación están expresados todos estos valores para los perfiles normalizados desde I 8 a I 60.

Los valores del ala **b** y del alma **d,** se obtienen como resultados de las siguientes fórmulas:

$h \leqq 240$ mm.	$h \geqq 260$ mm.
$b = 0{,}40\ h + 10$ mm. $d = 0{,}03\ h + 1{,}5$ mm.	$b = 0{,}300\ h + 35$ mm. $d = 0{,}036\ h$

Los valores de **r** y **d** son siempre iguales en un mismo perfil.

Los valores de **r_1** son aproximadamente iguales a **0,6 d,** con excepción de la viga I 55.

Perfil I	h	b	d = r	t	r_1
8	80	42	3,9	5,9	2,3
10	100	50	4,5	6,8	2,7
12	120	58	5,1	7,7	3,1
14	140	66	5,7	8,6	3,4
16	160	74	6,3	9,5	3,8
18	180	82	6,9	10,4	4,1
20	200	90	7,5	11,3	4,5
22	220	98	8,1	12,2	4,9
24	240	106	8,7	13,1	5,2
26	260	113	9,4	14,1	5,6
28	280	119	10,1	15,2	6,1
30	300	125	10,8	16,2	6,5
32	320	131	11,5	17,3	6,9
34	*340*	*137*	*12,2*	*18,3*	*7,3*
36	360	143	13,0	19,5	7,8
38	*380*	*149*	*13,7*	*20,5*	*8,2*
40	400	155	14,4	21,6	8,6
42 ½	*425*	*163*	*15,3*	*23,0*	*9,2*
45	450	170	16,2	24,3	9,7
47 ½	*475*	*178*	*17,1*	*25,6*	*10,3*
50	500	185	18,0	27,0	10,8
55	*550*	*200*	*19,0*	*30,0*	*11,9*
60	*600*	*215*	*21,6*	*32,4*	*13,0*

4. Representación a escala.

Para la representación correcta de los perfiles de vigas en dibujos técnicos de construcciones metálicas, ha de tenerse muy en cuenta la escala del dibujo (ver ficha N. 4202), así como el número de vistas necesarias (ver ficha N. 4005).

Tomando como vista principal la sección recta del perfil, son nece-

sarias como máximo las vistas lateral izquierda y la superior. A veces son suficiente sólo las vistas principal y superior, o las principal y lateral izquierda.

Cuando se dibuja a escala, se representa convencionalmente el espesor del ala (variable) en la vista lateral izquierda, por una línea llena y gruesa a la distancia **t** (fig. 2).

En dibujos a escala grande (1 : 1, 1 : 2,5) se puede representar el contorno de la sección recta del perfil con todo detalle, tomando para ello los valores correspondientes de la tabla 3.7. En la figura 3 damos como ejemplo el detalle de trazado del ala, con los radios de redondeamiento respectivos y cuyas cotas corresponden a la I 10.

Figura 2

La inclinación del contorno interior del ala (14 °/₀) se ha obtenido aplicando la construcción de la ficha P. G. 2110 hoja 2, y trazando por **P** una paralela (con las escuadras) a la recta **AB.** Los redondeamientos interiores y exteriores del ala son ejemplos de aplicación del problema sobre circunferencias condicionadas **r, R, R**, que han sido solucionados de acuerdo con el trazado dado en la ficha P. G. 2854. El espesor de líneas ha de ser grueso.

Cuando la escala sea más pequeña (1 : 5, 1 : 10) los redondeados pueden hacerse a pulso y la inclinación del borde interior del ala puede darse a sentimiento; no obstante, los valores principales del contorno deben tomarse a escala. El rayado de la sección recta puede también hacerse a pulso con la plumilla.

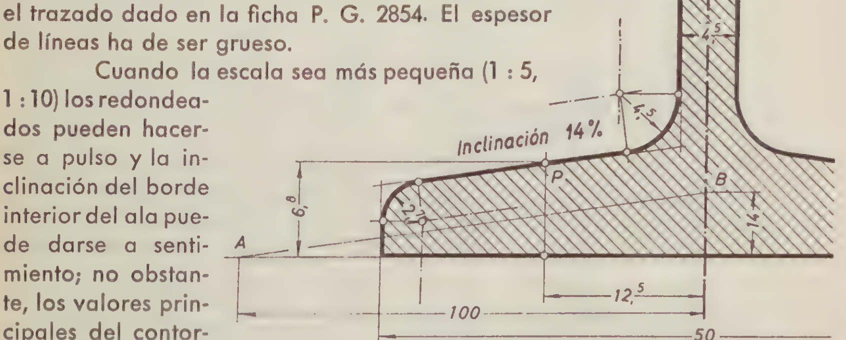


Figura 3

En escalas aún más pequeñas (1 : 20, 1 : 50), la sección recta se ennegrece totalmente y los gruesos del ala y alma, en las vistas lateral izquierda y superior, han de forzarse algo para que no se superpongan las líneas; el espesor de éstas ha de ser fino.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

NORMALIZACIÓN

DE

PERFILES LAMINADOS DE ACERO

Perfil en [normal (PN)

1. Generalidades.

Los perfiles cuya sección recta tienen forma U, están normalizados en España en la norma UNE 36522, y abarca la gama de perfiles laminados en nuestro país. Dicha norma coincide prácticamente con parte de la norma alemana DIN 1026 hoja 1, con ligeras diferencias que haremos resaltar en su momento oportuno. En el estudio que hacemos de este perfil tomamos como base la alemana, de mayor amplitud, indicando en cursiva los valores de los perfiles no incluídos en la norma española, y entre paréntesis los laminados en España no existentes en la alemana.

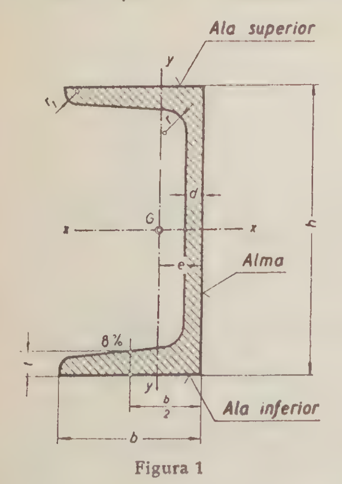


Figura 1

2. Designación.

La designación de un perfil U, empleada en *escritos comerciales*, es función de la altura del mismo. Se expresa de la forma que a continuación se indica:

Perfil en [16 UNE 36522

en la que el número 16 es la altura del perfil en centímetros.

En los *dibujos técnicos* se simplifica esta designación suprimiendo el número de la norma que queda sobreentendida. Su designación abreviada es

[16

que es la única utilizada en dibujos de aplicación de estructuras metálicas.

3. Dimensiones normalizadas para su representación en dibujos técnicos.

El centro **G** de gravedad de este perfil (fig. 1) está a la mitad de su altura, sobre el eje **x - x** perpendicular al alma. El eje **y - y** perpendicular al anterior y que también pasa por **G**, será pues paralelo al alma.

Los ejes **x - x** e **y - y** son los llamados *ejes principales de inercia*; el primero es eje de simetría del perfil, y el segundo no.

Sus dimensiones normalizadas, expresadas en milímetros, son las siguientes:

3.1 **h** Altura del perfil.
3.2 **b** Ancho de las alas.
3.3 **d** Espesor del alma.
3.4 **t** Espesor medio de las alas. Este espesor es variable y está dado en el centro del ala. La inclinación interior de éstas es del 8 % en todos los perfiles (correspondiente a un ángulo de 4° 40' aproximadamente; ver fichas P. G. 2110 hojas 2 y 3).
3.5 **r** Radio de redondeamiento interior.
3.6 **r_1** Radio de redondeamiento exterior.

3.7 **e** Distancia del centro de gravedad **G** al borde exterior del alma.

3.8 En la tabla que incluímos a continuación están expresados todos estos valores para los perfiles normalizados desde U 8 a U 30. Han sido excluídos los menores de U 8 por su escasa aplicación en dibujos de estructuras metálicas*, así como los superiores a U 30 (U 32, U 35, U 40) que estando incluídos en la norma DIN 1026 hoja 1, tienen dimensiones especiales y no siguen la regla general de formación que damos seguidamente, variando incluso la pendiente de las alas que pasa a ser del 5 °/₀.

Los valores del ala **b** y del alma **d** se obtienen como resultado de las siguientes fórmulas

$$b = 0{,}25\ h + 25\ \text{mm.}$$
$$r = t$$
$$r_1 \cong \frac{t}{2}$$

Estas relaciones se aplican también a los perfiles pequeños (excluídos) de U 3, U 4, U 5, U 6 ½.

TABLA DE DIMENSIONES

Perfil	h	b	d	t = r	r_1
8	80	45	6	8	4
10	100	50	6	8,5	4,5
12	120	55	7	9	4,5
14	140	60	7	10	5
16	160	65	7,5	10,5	5,5
18	180	70	8	11	5,5
20	200	75	8,5	11,5	6
22	220	80	9	12,5	6,5
24	*240*	*85*	*9,5*	*13*	*6,5*
(25 8)	250	80	10	12,5	6,5
(25 10)	250	100	10	16	8
26	*260*	*90*	*10*	*14*	*7*
28	*280*	*95*	*10*	*15*	*7,5*
30	*300*	*100*	*10*	*16*	*8*
(30)	300	90	13	14	4

4. Representación a escala.

Para la representación correcta de los perfiles de U en dibujos técnicos de estructuras metálicas, ha de tenerse muy en cuenta la escala del dibujo (ver ficha N. 4202), así como el número de vistas necesarias (ver ficha N. 4005).

* Estos perfiles pequeños se usan en cerrajería, chapistería, etc.

Tomando como vista principal la sección recta del perfil, son necesarias como máximo las vistas lateral izquierda y superior. A veces son suficientes sólo las vistas principal y superior, o las vistas principal y lateral izquierda.

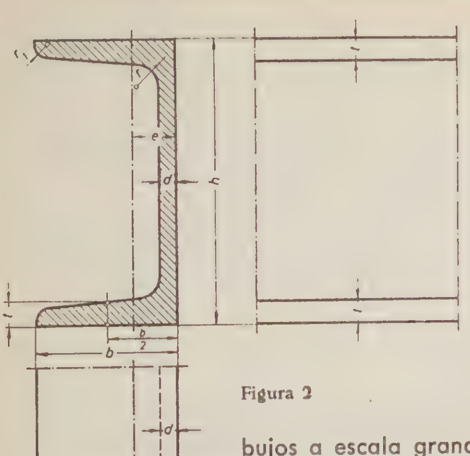


Figura 2

Cuando se dibuja a escala la vista lateral derecha, se representa el espesor del ala (variable), por línea llena gruesa a la distancia t si es vista (fig. 2), o por líneas de trazos si es oculta. En dibujos a escala grande (1 : 1, 1 : 2,5) se puede representar el contorno de la sección recta del perfil con todo detalle, tomando los valores correspondientes de la tabla 3.8. En la figura 3, damos como ejemplo, el detalle del trazado del ala con los radios de redondeamiento respectivos, y cuyas cotas corresponden al perfil U 10.

La inclinación del contorno del ala (8 %) se ha obtenido aplicando la construcción de la ficha P. G. 2110 hoja 2, y trazando por **P** una paralela (con las escuadras) a la recta **AB.** Los redondeamientos interiores y exteriores son ejemplos de aplicación sobre circunferencias condicionadas (**r, R, R**), que han sido solucionados de acuerdo con el trazado dado en la ficha P. G. 2854. El espesor de líneas ha de ser grueso.

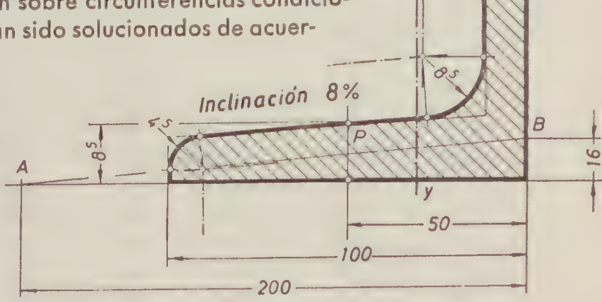


Figura 3

Cuando la escala sea más pequeña (1 : 5, 1 : 10), los redondeados pueden hacerse a pulso y la inclinación del borde interior del ala puede darse a sentimiento; no obstante, los valores principales del contorno deben tomarse a escala. El rayado de la sección recta puede también hacerse a pulso. El espesor de líneas ha de ser mediano. En escalas aún más pequeñas (1 : 20, 1 : 50), la sección recta se ennegrece totalmente y los gruesos de ala y alma en las vistas lateral izquierda y superior, han de forzarse algo; el espesor de líneas ha de ser fino.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla

Enero 1966

NORMALIZACIÓN
DE
PERFILES LAMINADOS DE ACERO
Angular de lados iguales
de perfil normal (P N)

1. Generalidades.

Los perfiles cuya sección recta tienen forma L de lados iguales, están normalizados en España en la norma UNE 36531 y abarca la gama de perfiles laminados en nuestro país. Dicha norma es parte de la más general alemana DIN 1028. En el estudio que hacemos de este perfil, hemos tomado como base la alemana, de mayor amplitud, indicando en letra cursiva los valores de los perfiles no incluídos en la norma española,

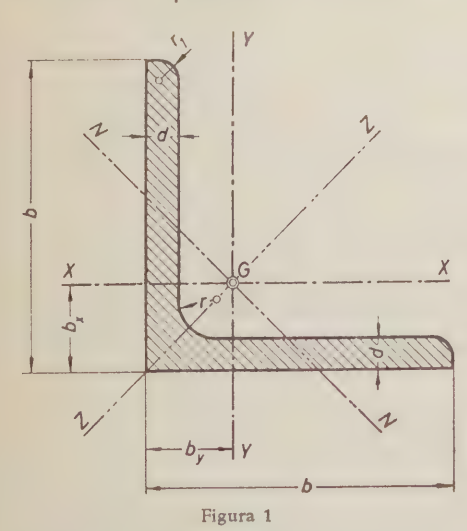


Figura 1

2. Designación.

La designación de un perfil angular de lados iguales, empleada en *escritos comerciales*, es función de la longitud de sus alas y del espesor de ellas. Se expresa en la forma que a continuación se indica:

Angular (PN) 50·50·7 UNE 36531

en la que el número 50 es la anchura de sus alas en milímetros, y 7 su espesor, también en milímetros.

En los dibujos técnicos se simplifica esta designación suprimiendo el número de la norma que queda sobreentendida y sustituyendo las palabras «Angular, (PN)» por el símbolo L. Su designación abreviada es:

L 50 · 50 · 7

que es la única utilizada en dibujos de construcción de estructuras metálicas.

3. Dimensiones normalizadas para su representación en dibujos técnicos.

El centro de gravedad **G** de este perfil está en la bisectriz del ángulo recto formado por sus dos alas, y a la distancia $b_x = b_y$ del vértice (fig. 1).

Por el centro de gravedad **G** pasan dos sistemas de *ejes de inercia*, siendo dichos ejes en cada sistema perpendiculares entre sí. El sistema **X-X**, **Y-Y** cuyos ejes son paralelos a los lados del perfil angular, y el sistema **Z-Z**, **N-N** en el cual el eje **Z-Z** es bisectriz del ángulo recto, y a su vez único eje de simetría del perfil.

Sus dimensiones normalizadas, expresadas en milímetros, son las siguientes:

3.1 **b** Ancho de las dos alas del perfil.

3.2 **d** Espesor de ambas alas. Este espesor es constante en toda su longitud.

3.3 **r** Radio de redondeamiento interior.

3.4 **r_1** Radio de redondeamiento exterior.

Angular L	b	d	r	r_1	$b_x = b_y$
20 - 20 - 3	20	3	3,5	2	6,0
20 - 20 - 4		4			6,4
25 - 25 - 3	25	3	3,5	2	7,3
25 - 25 - 4		4			7,6
25 - 25 - 5		5			8,0
30 - 30 - 3	30	3	5	2,5	8,4
30 - 30 - 4		4			8,9
30 - 30 - 5		5			9,2
35 - 35 - 4	35	4	5	2,5	10,0
35 - 35 - 5		5			10,4
35 - 35 - 6		6			10,8
40 - 40 - 4	40	4	6	3	11,2
40 - 40 - 5		5			11,6
40 - 40 - 6		6			12,0
45 - 45 - 5	45	5	7	3,5	12,8
45 - 45 - 7		7			13,6
50 - 50 - 5	50	5	7	3,5	14,0
50 - 50 - 6		6			14,5
50 - 50 - 7		7			14,9
50 - 50 - 9		9			15,6
55 - 55 - 6	55	6	8	4	15,6
55 - 55 - 8		8			16,4
55 - 55 - 10		10			17,2
60 - 60 - 6	60	6	8	4	16,9
60 - 60 - 8		8			17,7
60 - 60 - 10		10			18,5
65 - 65 - 7	65	7	9	4,5	18,5
65 - 65 - 9		9			19,3
65 - 65 - 11		11			20,0
70 - 70 - 7	70	7	9	4,5	19,7
70 - 70 - 9		9			20,5
70 - 70 - 11		11			21,3
75 - 75 - 7	75	7	10	5	20,9
75 - 75 - 8		8			21,3
75 - 75 - 10		10			22,1
75 - 75 - 12		12			22,9

Angular L	b	d	r	r_1	$b_x = b_y$
80 - 80 - 8	80	8	10	5	22,6
80 - 80 - 10		10			23,4
80 - 80 - 12		12			24,1
80 - 80 - 14		14			24,8
90 - 90 - 9	90	9	11	5,5	25,4
90 - 90 - 11		11			26,2
90 - 90 - 13		13			27,0
90 - 90 - 16		16			28,1
100 - 100 - 10	100	10	12	6	28,2
100 - 100 - 12		12			29,0
100 - 100 - 14		14			29,8
100 - 100 - 16		16			30,6
110 - 110 - 10	110	10	12	6	30,7
110 - 110 - 12		12			31,5
110 - 110 - 14		14			32,1
120 - 120 - 11	120	11	13	6,5	33,6
120 - 120 - 13		13			34,4
120 - 120 - 15		15			35,1
120 - 120 - 17		17			35,9
130 - 130 - 12	130	12	14	7	36,4
130 - 130 - 14		14			37,2
130 - 130 - 16		16			38,0
140 - 140 - 13	140	13	15	7,5	39,2
140 - 140 - 15		15			40,0
140 - 140 - 17		17			40,8
150 - 150 - 14	150	14	16	8	42,1
150 - 150 - 16		16			42,9
150 - 150 - 18		18			43,6
160 - 160 - 15	160	15	17	8,5	44,9
160 - 160 - 17		17			45,7
160 - 160 - 19		19			46,5
180 - 180 - 16	180	16	18	9	50,2
180 - 180 - 18		18			51,0
180 - 180 - 20		20			51,8
200 - 200 - 16	200	16	18	9	56,2
200 - 200 - 18		18			56,0
200 - 200 - 20		20			56,8

3.5 $b_x = b_y$ Distancia del centro de gravedad al vértice del ángulo recto, medida en la dirección de las alas.

3.6 En la tabla que damos en la página anterior están expresados en milímetros estos valores para los perfiles normalizados desde L 20 · 20 · 3 hasta L 200 · 200 · 20.

4. Representación a escala.

Para la representación correcta de los perfiles angulares de lados iguales en dibujos técnicos de construcciones metálicas, ha de tenerse muy en cuenta la escala del dibujo (ver ficha N. 4202), así como el número de vistas necesarias (ver ficha N. 4005).

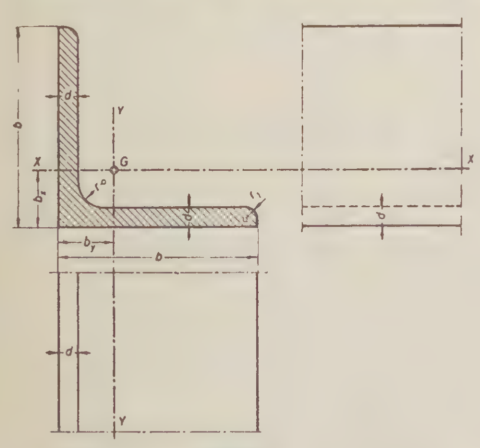


Figura 2

Tomando como vista principal la sección recta del perfil, son necesarias como máximo las vistas lateral izquierda y la superior (fig. 2).

En dibujos a escala grande (1 : 1, 1 : 2,5) se puede representar el contorno del perfil con todo detalle, tomando para ello los valores correspondientes de la tabla 3.6. Los redondeamientos interior y exteriores de las alas son ejemplos de aplicación del problema sobre circunferencias condicionadas **r**, **R**, **R**, que se solucionarán de acuerdo con el trazado dado en la ficha P. G. 2854, notablemente simplificado por ser las rectas dadas perpendiculares entre sí.

Cuando la escala sea más pequeña (1 : 5, 1 : 10) los redondeados pueden hacerse a pulso, aún cuando las dimensiones principales han de tomarse a escala. El rayado de la sección recta puede también hacerse a pulso con la plumilla.

En escalas aún más pequeñas (1 : 20, 1 : 50), la sección recta se ennegrece totalmente y los gruesos de las alas en las vistas lateral izquierda y superior, han de forzarse algo para que no se superpongan las líneas; el espesor de éstas ha de ser fino.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

Ficha n.° 98	DIBUJO TÉCNICO Normalización	N. 4223

NORMALIZACIÓN

DE

PERFILES LAMINADOS DE ACERO

Perfil en T normal (PN)

1. Generalidades.

Los perfiles cuya sección recta tienen forma de **T**, están normalizados en España en la norma UNE 36533, y abarca la gama de perfiles laminados en nuestro país. El perfil **T** español tiene la altura igual a su ancho. La norma alemana DIN 1024 tiene también normalizado este perfil y además otro llamado de ala ancha en el que el ala es el doble de su altura. En el estudio que hacemos de este perfil, hemos tomado como base la alemana de ancho igual a la altura, de mayor amplitud, indicando con cursiva los perfiles no incluídos en la norma española.

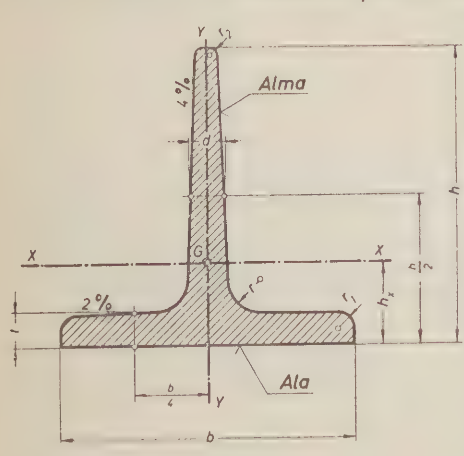


Figura 1

2. Designación.

La designación de un perfil **T**, empleada en *escritos comerciales* es función de sus dimensiones máximas en ancho y alto, y de su espesor. Se expresa en la forma que a continuación se indica:

Perfil **T** 45 · 45 · 5 UNE 36533

en la que la cifra 45 es la altura y ancho del perfil en milímetros, y la 5 el espesor de ambas, también en milímetros.

En los *dibujos técnicos* se simplifica esta designación suprimiendo la palabra «Perfil» y el número de la norma que queda sobreentendida, y se expresa solamente el número del perfil, que es su anchura en centímetros. Su designación abreviada es

T 4 ½

que es la única utilizada en dibujos de construcción de estructuras metálicas.

3. Dimensiones normalizadas para su representación en dibujos técnicos.

Este perfil tiene un eje vertical de simetría **Y-Y**, sobre el que se encuentra el centro de gravedad **G**. El eje **X-X** que pasa por el centro **G** es perpendicular al **Y-Y** (fig. 1).

3.1 **h** Altura del perfil.

3.2 **b** Ancho del ala.

3.3 **d** Espesor del alma. Este espesor es variable y está dado a la mitad de la altura. La inclinación del contorno del alma es de un 4 % con respecto al eje Y-Y.

3.4 **t** Espesor del ala. Este espesor es también variable y está dado a la distancia $\frac{b}{4}$ del eje Y-Y. La inclinación interior del ala es del 2 % con respecto al eje X-X.

3.5 **r** Radio de redondeamiento interior.

3.6 r_1 Radio de redondeamiento del ala.

3.7 r_2 Radio de redondeamiento del alma.

3.8 h_x Distancia del centro de gravedad **G** al contorno exterior del ala.

3.9 En la tabla que damos a continuación están expresados estos valores para los perfiles normalizados desde **T** 20 · 20 · 3 a **T** 140 · 140 · 15.

Los valores de **t, d** y **r** son siempre iguales; el valor de r_1 es en números redondos la mitad del de **r**.

Perfil T	h	b	d = t = r	r_1	r_2	h_x
2	20	20	3	1,5	1	5,8
2 ½	25	25	3,5	2	1	7,3
3	30	30	4	2	1	8,5
3 ½	35	35	4,5	2,5	1	9,9
4	40	40	5	2,5	1	11,2
4 ½	45	45	5,5	3	1'5	12,6
5	50	50	6	3	1,5	13,9
6	60	60	7	3,5	2	16,6
7	70	70	8	4	2	19,4
8	80	80	9	4,5	2	22,2
9	90	90	10	5	2,5	24,8
10	100	100	11	5,5	3	27,4
12	120	120	13	6,5	3	32,8
14	140	140	15	7,5	4	38,0

4. Representación a escala.

Para la representación correcta de los perfiles **T** en dibujos técnicos de construcciones metálicas, ha de tenerse muy en cuenta la escala del dibujo (ver ficha N. 4202), así como el número de vistas necesarias (ver ficha N. 4005).

Tomando como vista principal la sección recta del perfil, son necesarias como máximo las vistas lateral izquierda y la superior (fig. 2).

En dibujos a escala grande (1 : 1, 1 : 2,5) se puede representar el contorno del perfil con todo detalle, tomando para ello los valores corres-

pondientes de la tabla 3.9. En la figura 3 damos como ejemplo el detalle del trazado del ala, con los radios de redondeamientos respectivos y cuyas cotas corresponden al perfil **T** 10.

La inclinación del contorno interior del ala (2 %), así como la del alma (4 %) se ha obtenido aplicando la construcción de la ficha P. G. 2110, hoja 2, y trazando por **P** una paralela (con las escuadras) a la recta **AB.** Los redondeamientos del ala y alma son ejemplos de aplicación del problema sobre circunferencias condicionadas **r, R, R,** que han sido solucionados de acuerdo con el trazado dado en la ficha P. G. 2854. El espesor de líneas ha de ser grueso.

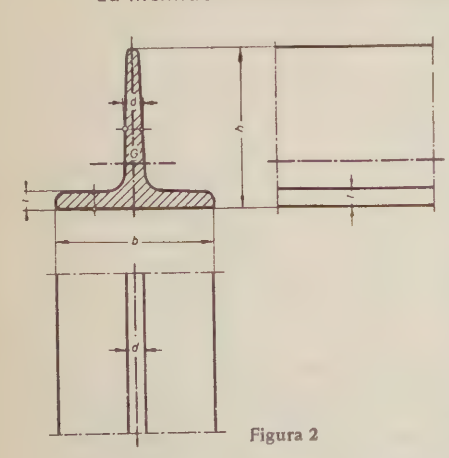


Figura 2

Cuando la escala sea más pequeña (1 : 5, 1 : 10), los redondeados pueden hacerse a pulso y la inclinación del ala y alma pueden darse a sentimiento; no obstante, los valores principales del contorno deben tomarse a escala. El rayado de la sección recta puede hacerse también a pulso con la plumilla.

En escalas aún más pequeñas (1 : 20, 1 : 50), la sección recta se ennegrece totalmente y los gruesos del ala y alma, en las vistas lateral izquierda y superior, han de forzarse algo para que no se superpongan las líneas; el espesor de éstas ha de ser fino.

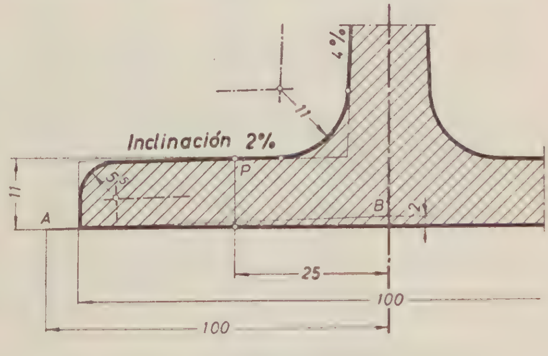


Figura 3

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

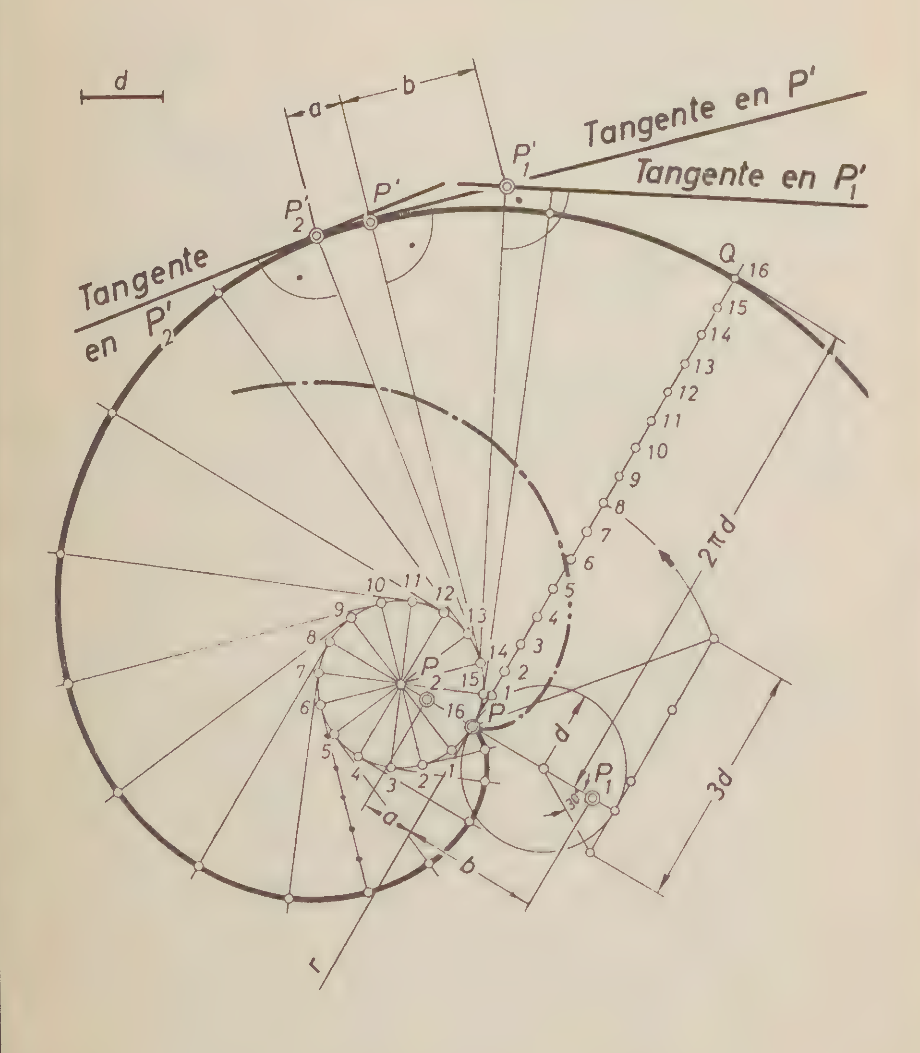
PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Construir una evolvente de círculo dado el radio de la directriz.

Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla.
Enero 1966

Ficha n.º 99	DIBUJO TÉCNICO Problemas Geométricos	P. G. 2560

ENUNCIADO: *Construir una evolvente de círculo dado el radio de la directriz.*



Reproducción prohibida	Es propiedad del autor Tomás Alvarez Peralto, Catedrático de DIBUJO INDUSTRIAL de la E. T. P. I. de Sevilla	Enero 1966

1. Generalidades.

La evolvente de círculo figura como caso particular de las curvas cíclicas planas cuya clasificación hemos realizado en la ficha P. G. 2520, hoja 2, párrafo 5, siendo a su vez las curvas cíclicas casos particulares de las curvas de rodadura, estudiadas en las fichas P. G. 2520, hojas 1 y 2. En la evolvente de círculo, la directriz es una circunferencia y la ruleta una recta tangente a ella.

Vamos a aplicar las propiedades generales de las curvas de rodadura al trazado del problema planteado en esta ficha sobre la construcción de la evolvente de círculo normal, conocido el radio de la directriz.

Podemos definir la evolvente de círculo normal como *curva engendrada por un punto de una recta que se mueve rodando sin resbalar sobre una circunferencia, permaneciendo siempre tangente a ella.*

Si consideramos la posición inicial del movimiento de la ruleta sobre la directriz, en la que el punto generador **P** sea el de contacto, se concibe fácilmente que cuando la ruleta **r** haya dado una vuelta completa, vuelve a coincidir con su posición inicial, y el punto generador ocupará la posición **Q,** distanciado de **P** la magnitud $2 \pi d$, siendo **d** el radio de la directriz. En vueltas sucesivas la ruleta **r** volverá a ser coincidente con la posición inicial y el punto generador se habrá desplazado del punto origen las distancias $2 \times 2 \pi d$, $3 \times 2 \pi d$, ... $n \times 2 \pi d$, siendo **n** el número de vueltas. La evolvente de círculo forma pues una especie de espiral en la cual la distancia entre dos espiras consecutivas, medidas en la misma posición de la ruleta y sobre ésta, permanecerá constante e igual a la magnitud $2 \pi d$; a esta magnitud se la llama *paso.*

Las consideraciones anteriores justifican el trazado que damos a continuación.

2. Resolución.

Sea **d** el radio de la directriz y **r** la recta ruleta tangente a la directriz. El punto **P** de contacto es el punto generador; el movimiento de giro de la recta ruleta lo suponemos en el sentido de las agujas del reloj (negativo; ver ficha P. G. 2110, párrafo 3).

2.1 Tómese a partir de **P** sobre la ruleta **r** una magnitud **PQ** igual al desarrollo de la circunferencia directriz (ver ficha P. G. 2413).

2.2 Dividamos el segmento **PQ** en un número cualquiera de partes iguales (16 en la figura), y la circunferencia directriz en el mismo número de partes iguales, (ver ficha P. G. 2010, párrafo 9); las longitudes de arcos de la circunferencia serán pues iguales a las divisiones del segmento **PQ.**

2.3 En una fracción determinada de vuelta, puede obtenerse la posición del punto generador sabiendo que son iguales las longitudes de arco de la directriz y segmento de la ruleta que hayan estado en contacto durante el movimiento (ver ficha P. G. 2520, párrafo 4.2). Por consiguiente, tracemos por los puntos 1, 2, 3,... de división de la directriz, rectas tangentes* en el sentido del movimiento, y a partir del punto de contacto tómense sobre ella tantas divisiones como correspondan a la posición de la ruleta, que nos darán puntos de la evolvente. Por ejemplo, en la posición de la tangente en el punto 6 de la directriz, deberemos tomar una longitud de seis divisiones. que pueden obtenerse directamente con el compás, sobre el segmento **PQ** desde **P** al punto 6.

2.4 Uniendo los puntos obtenidos, con un trazo continuo, obtendremos la primera espira de la evolvente de círculo. Si quisiéramos obtener dos o más espiras consecutivas, es suficiente con prolongar las tangentes trazadas según 2.2, y tomar sobre ellas, a partir de la primera espira, uno o varios segmentos iguales a **PQ.**

Si el giro de la ruleta **r** lo hubiésemos efectuado en sentido contrario al de las agujas del reloj (positivo), obtendríamos otra rama de evolvente (dibujada de trazo y punto en la figura), que sería simétrica a la primera (trazo continuo) con respecto al radio de la directriz que pasa por el punto de contacto **P.** Su trazado es el mismo que el expuesto.

Si el punto generador fuese exterior a **r** y situado en el semiplano que no contenga a la circunferencia directriz (punto P_1), a una distancia **b** de la recta, describirá una *evolvente alargada;* si estuviese en el semiplano opuesto (punto P_2) a una distancia **a** de la recta, describirá una *evolvente acortada.* Estos puntos ocuparán las posiciones $\mathbf{P'_1}$ y $\mathbf{P'_2}$ a las distancias **b** y **a** de la ruleta, en cualquier posición de ésta (punto 15 en la figura), lo cual permite el trazado de ambas.

La tangente en $\mathbf{P'_1}$ será perpendicular a la $\mathbf{P'_1}$**-15;** la tangente en **P'** perpendicular a la **P'-15** y la tangente en $\mathbf{P'_2}$ perpendicular a la $\mathbf{P'_2}$**-15** (ver ficha P. G. 2520, párrafo 4.3).

Este trazado puede deducirse del estudiado en la ficha P. G. 2540, con las transformaciones adecuadas en su paso al límite, al hacerse infinitamente grande el radio de la ruleta.

* Siendo la tangente a una circunferencia perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto, puede hacerse su trazado rápidamente con las escuadras (ver ficha P. G. 2421, párrafo 7).

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla

PROBLEMAS GRÁFICOS DEL PLANO

Lugares geométricos

Ejemplos 13 al 17

1. Generalidades.

Continuamos en esta ficha el estudio de los l. g. núms. 13 al 17, de acuerdo con las directrices marcadas en la ficha P. G. 2802.

2. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 13.

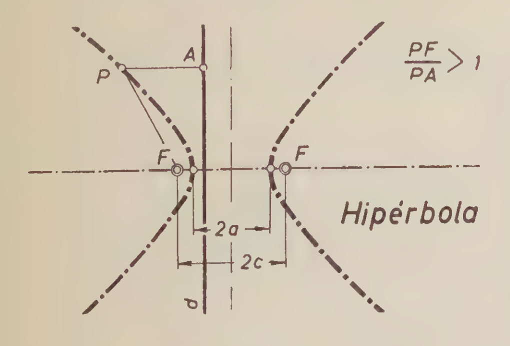


Figura 1

El l. g. de los puntos del plano cuya razón de distancias a un punto F y a una recta d situados en dicho plano, es constante, es una curva cónica.

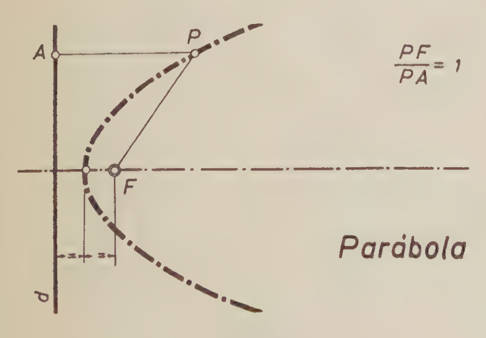


Figura 2

Si dicha razón es mayor que la unidad, la curva es una **hipérbola** (fig. 1).

Si dicha razón es igual a la unidad, la curva es una **parábola** (fig. 2).

Si dicha razón es menor que la unidad, la curva es una **elipse** (fig. 3).

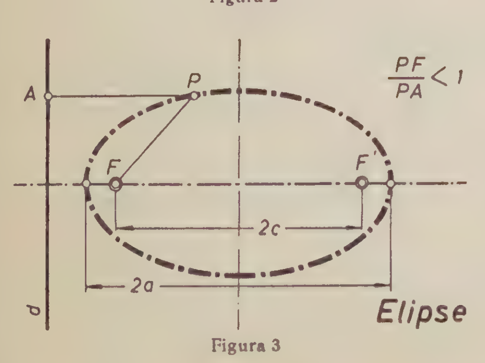


Figura 3

La demostración de este l. g. está dada en la ficha P. G. 2450, hoja 3, párrafo 5, a la que remitimos al lector.

3. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 14.

$$PF + PF' = AB = 2a$$

A, B, P, F, F', 2c, 2a

Figura 5

El l. g. de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' situados en el mismo, es constante y mayor que la distancia entre dichos puntos

es

una elipse cuyos focos son los puntos dados y cuyo eje mayor es la suma constante conocida.

En la ficha P. G. 2460, párrafo 2, hemos deducido y demostrado esta propiedad, conocida por el «Teorema de Dandelin en la elipse», a la que remitimos al lector.

4. LUGAR GEOMÉTRICO n.º 15.

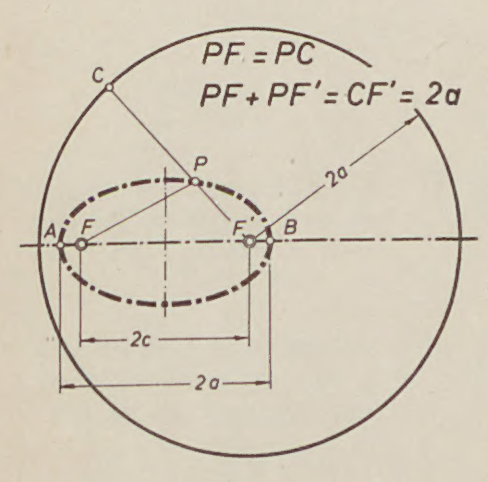


Figura 6

El l. g. de los puntos del plano que equidistan de una circunferencia de centro F' y de un punto interior F de ésta,

es

una elipse cuyos focos son el punto dado F y el centro F' de la circunferencia, siendo su eje mayor el radio de dicha circunferencia.

En la ficha P. G. 2460, hoja 2, párrafo 4.1, hemos demostrado esta propiedad.

5. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 16.

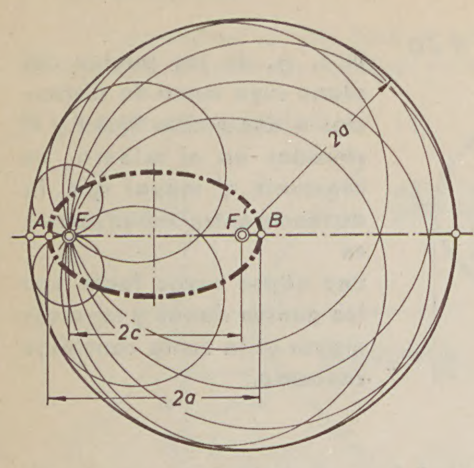


Figura 7

El l. g. de los centros de circunferencias tangentes a una circunferencia dada de centro F' y que pasen por un punto F interior de ésta

es

una elipse cuyos focos son el centro F' de la circunferencia y el punto F dados, y su eje mayor es el radio de dicha circunferencia.

En virtud de las consideraciones expresadas en el párrafo 1 de la ficha P. G. 2802, este l. g. es equivalente al l. g. n.° 15, por lo que omitimos su demostración.

6. LUGAR GEOMÉTRICO n.° 17.

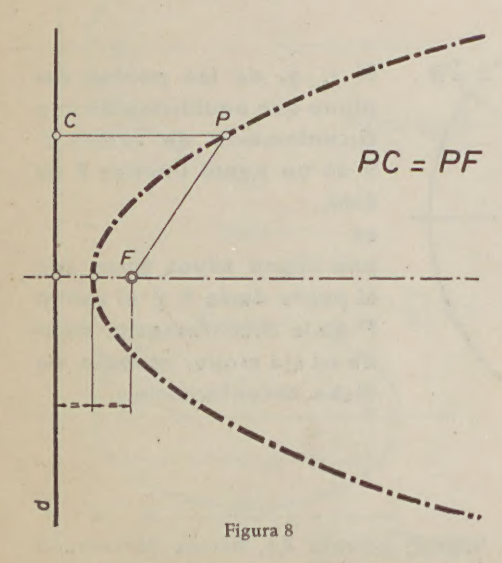


Figura 8

El l. g. de los puntos del plano que equidistan de una recta d y de un punto F exterior a ella

es

una parábola cuya directriz y foco son respectivamente la recta y punto dados.

En la ficha P. G. 2480, párrafo 2.2, hemos demostrado esta propiedad.

Imp. Alvarez.-G. Cuadrado, 24 - Sevilla


FICHAS DE DIBUJO TÉCNICO
TAP
001

colorchecker CLASSIC

calibrite

mm